THÈSES

PRESENTEES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE CAEN

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

Par Monique GHINEA

1 re THESE - METHODES D'ITERATION DANS LA THEORIE DES EQUATIONS

2 e THESE - PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Présentées et soutenues le 18 Octobre 1961

JURY

Président

M. D. PHAM

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

Examinateurs

M.R. PALLU de la BARRIERE

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

M. J. FAVARD

Professeur à la Sorbonne et à l'Ecole Polytechnique

M. A. NATAF

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542709_0023

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

E R R A T U M

AU LIEU DE :	LIRE :
Page 2 - Dernière ligne	
$\pm F_p(x) \left[1 + F_p'(x)\right]$	$\frac{1}{p} F_p(x) \left[1 + F_p'(x)\right]$
Page 16 - Ligne 17	
$\left\|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right\| < \|\phi'(a)\| + r_0 M_1(r)$	$\left\|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right\| < \|\phi'(a)\| + r_0 M_1(r_0)$
Page 17 - Avant dernière ligne	
$(0 < K < 1)$	$(0 < k < 1)$
Page 40 - § 2.5. ligne 5	
.... uniformément.	... uniformément, ainsi que la série de terme général $\frac{F^n G_{n+1}}{n!}$
Page 42 - Ligne 6	
$G(z) = \frac{g}{\xi}$	$G(z) = \frac{g}{\xi} + \ldots$
Page 44 - Dernière ligne	
$= (1 - x)^{-\alpha}$ quand x tend vers 1 .	$= (1 - x)^{-\alpha}$, quand x tend vers 1.
Page 46 - Ligne 9	
$G(z)$	$\|G(z)\|$
Page 46 - Ligne 3 à partir du bas	
$\frac{1}{2 i \pi} \int_C$	$\frac{p!}{2 i \pi} \int_C$
Page 47 - Formule 2.(8)	
$\|G_n^{(p)}\| < \frac{(p+n-2)}{(n-2)!} k_n \frac{1}{\delta^{p+n-1}}$	$\|G_n^{(p)}\| < \frac{(p+n-2)!}{(n-2)!} k_n \frac{1}{\delta^{p+n-1}}$
Page 50 - § 2.8. Ligne 9	
On a vu au début de la partie de ce chapitre	On a vu au début de la partie B de ce chapitre

AU LIEU DE :	LIRE :
Page 63 - Ligne 2	
$\ldots + \frac{1}{2!}\,\phi(M)\,(DH)^{(p)} +$	$\ldots + \frac{1}{p!}\,\phi(M)\,(DH)^{(p)} +$
Page 64 - Ligne 6	
$\frac{d}{dx}\,x^p = p\,x^p$	$x\,\frac{d}{dx}\,x^p = p\,x^p$
Page 67 - Ligne 4	
$D =$	$\phi(\mathfrak{M})D =$
Page 71 - Ligne 9	
$\phi_p = M + F_p(M) = \mathfrak{M} + L_2(M - \mathfrak{M})$	$\phi_p = M + F_p(M) = \mathfrak{M} + L_p(M - \mathfrak{M})$
Page 71 - Formule 3.(7)	
$G_p = \left[\quad\right] \mathcal{F}^{p-1}$	$G_p = \left[\quad\right] \mathcal{F}^{-p+1}$
Page 73 - Ligne 2	
$\frac{1}{2!}\,\left[2\,G\,\mathcal{F}\,G\,\mathcal{F} + G\,\underline{F}^2\,F\right]\,F$	$\frac{1}{2!}\,\left[2\,G\,\mathcal{F}\,G\,\mathcal{F} + G\,\underline{F}^2\,D\right]\,F$
Page 114 - Théorème II. Ligne 2	
$\sum_{p=1}^{N=1}$	$\sum_{p=1}^{N-1}$
Page 116 - Ligne 9 à partir du bas	
$A^{-1}v = M$	$A^{-1}\,V = M$
Page 116 - Ligne 8 à partir du bas	
calcul de l'inverse de M	calcul de M

THÈSES

PRESENTEES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE CAEN

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

Par Monique GHINEA

1re THESE - METHODES D'ITERATION DANS LA THEORIE DES EQUATIONS

2e THESE - PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Présentées et soutenues le 10 Octobre 1961

JURY

Président

M. D. PHAM

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

Examinateurs

M.R. PALLU de la BARRIERE

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

M. J. FAVARD

Professeur à la Sorbonne et à l'Ecole Polytechnique

M. A. NATAF

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

UNIVERSITE DE CAEN

FACULTE DES SCIENCES

M.	LOZAC'H	Doyen, Professeur	(Chimie)
MM.	DANGEARD	Professeur	(Géologie)
	SCHERER	Professeur	(Physique Générale)
	APERY	Professeur	(Calcul Différentiel et Intégral)
	JACQUET	Professeur	(Microbiologie)
	BOCQUET	Assesseur, Professeur	(Zoologie)
	COLOMBANI	Professeur	(Physique)
Mme	WALTER-LEVY	Professeur	(Chimie)
MM.	PITOT	Professeur	(Botanique)
	CAMPBELL	Professeur	(Mécanique rationnelle)
	BACHELET	Professeur	(Chimie)
	MALLIAVIN	Professeur	(Mathématiques)
	VIALLE	Professeur	(Chimie)
	COJAN	Professeur	(Physique)
	PALLU de la BARRIERE	Professeur	(Mathématiques)
	PHAM	Professeur	(Mathématiques)
	GIACOMO	Professeur	(Physique)
	REY	Professeur	(Zoologie)
	MONIER	Professeur	(Minéralogie)
	CONIA	Professeur	(Chimie)
	PAREYN	Professeur	(Géologie)
	BINET	Professeur sans chaire	(Botanique)
	ROMANET	Professeur sans chaire	(Chimie)
	NATAF	Professeur sans chaire	(Mathématiques)
	THUREAU	Professeur sans chaire	(Electronique)
MM.	DOGUET	Maitre de Conférences	(Biologie Végétale)
	CABANNES	Maitre de Conférences	(Physique)
	RYBAK	Maitre de Conférences	(Physiologie Animale)
	MABBOUX-STROMBERG	Maitre de Conférences	(Physique)
	GIRAULT	Maitre de Conférences	(Mathématiques)
	SCHAAL	Maitre de Conférences	(Chimie)
	GEFFROY	Maitre de Conférences	(Mathématiques)
	BARRAT	Maitre de Conférences	(Physique)
	BERNARD	Maitre de Conférences	(Chimie)
	LEGROS	Maitre de Conférences	(Physique)
	GAULT	Maitre de Conférences	(Chimie)
	SALMON	Maitre de Conférences	(Physique)
Melle	DEMEUSY	Maitre de Conférences	(Biologie)
MM.	MOLLIER	Maitre de Conférences	(Chimie)
	PINAZZI	Maitre de Conférences	(Chimie)
	GRAF	Maitre de Conférences	(Physique)
	KAUFFMANN	Maitre de Conférences	(Microbiologie)
Mme	CONNES	Maitre de Conférences	(Physique)
M.	CAUCAL	Secrétaire Principal des Facultés	

A MONSIEUR LE PROFESSEUR DANIEL PHAM

en témoignage de ma profonde

gratitude

A MA FAMILLE

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur J. FAVARD et Monsieur le Professeur R. PALLU de la BARRIERE d'avoir bien voulu examiner mon travail et d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Je prie Monsieur le Professeur A. NATAF de croire à ma sincère reconnaissance pour les conseils qu'il a bien voulu me prodiguer.

AVANT - PROPOS

La théorie des équations est un domaine de recherche qui a occupé les mathématiciens depuis la plus haute antiquité. Sans remonter aux oeuvres des Grecs, des Hindous et des Arabes, notamment avec Omar Khayam dont la contribution ne fut pas négligeable dans le domaine des équations du second et du troisième degré, il faut citer les oeuvres des auteurs chinois des XIIIème et XIVème siècles dont le plus marquant fut sans conteste Tsin Kieou Chae qui, dans son oeuvre maîtresse des Neuf Sections publiée en 1247, donnait des méthodes numériques de résolution des équations algébriques de degré élevé, méthodes qui ont été reprises et systématisées par Hörner en 1819. Vers la même époque, en Europe, Leonardo Fibonacci dit Léonard de Pise (1180-1240) dans sa "Flos Leonardi" proposait des méthodes de résolution des équations du troisième degré notamment. Du Moyen Age au XVIème siècle aucune découverte marquante ne fut faite dans le domaine de la résolution des équations. Il faut attendre les écoles italiennes et françaises avec Niccolo Fontana dit Tartaglia (1500-1557), Girolimo Gardano (1501-1576), Ludovico Ferrari (1522-1565), François Viète (1540-1603) pour trouver des idées nouvelles dans la résolution numérique des équations de degré élevé à l'aide des radicaux et des fonctions trigonométriques.

Plus tard, aux XVIIème et XVIIIème siècles, des mathématiciens parmi les plus grands tels Descartes, Pascal, Leibniz, Newton, Taylor, Euler, Lagrange, Gauss ont essayé, quelquefois sans succès, de résoudre des

équations algébriques de plus en plus compliquées à l'aide des transcendantes élémentaires. On connait la méthode de Jacobi et de ses successeurs pour résoudre des équations du quatrième et du cinquième degré à l'aide des fonctions elliptiques et hyperelliptiques. Après la découverte de Gallois sur les groupes liés aux racines d'une équation algébrique de nombreux auteurs ont cherché la représentation des racines à l'aide de transcendantes de plus en plus complexes telles les fonctions hypergéométriques généralisées de Gauss. On peut à ce propos mentionner les travaux de Hermite, Kronecker, Jordan, Lindemann, Klein.

Dans ce travail je n'aborderai pas le point de vue analytique. Une autre direction de recherche, à mon sens aussi générale remonte aux travaux de Newton et Raphson sur la fameuse formule d'itération du second ordre : au lieu de chercher à représenter les racines d'une équation par une expression analytique telle que les radicaux ou les transcendantes plus ou moins compliquées, on cherche à étudier la formule générale d'inversion d'une fonction implicite et à en extraire des procédés permettant le calcul numérique des valeurs de cette fonction. Telle est dans ses très grandes lignes l'idée du procédé itératif bien que dans un grand nombre de cas on perde de vue l'origine de ce procédé. Le procédé itératif en lui-même n'a pas en général d'autre ambition que de fournir une suite qui converge plus ou moins rapidement vers la racine c'est à dire la fonction que l'on a en vue. La construction d'une telle suite peut faire appel à des procédés analytiques plus ou moins compliqués ou parfois à des procédés purement numériques. Il n'est pas possible de citer tous les travaux qui ont été faits dans ce sens depuis Newton et Raphson. Les plus marquants des auteurs semblent être Lagrange, Gauss, Hörner, Laguerre, Hermite, König, Bailey, Bodewig, Aitken, Friedmann, etc...

Parmi ces procédés certains s'appliquent exclusivement aux équations algébriques comme ceux de Laguerre et de Hörner, ainsi que les procédés de factorisation des polynômes comme ceux de Lin et de Bairstow. D'autres applicables théoriquement à toute équation sont trop longs pour être utilisables même dans les cas usuels : telle parait être l'itération de König. Un caractère commun à presque tous ces procédés est qu'ils fournissent la racine cherchée lorsque l'on est dans un certain voisinage de cette racine sans que l'on puisse, en général, déterminer a priori ce voisinage. Bien que les itérations à partir du second ordre soient stables c'est à dire donnent une suite convergente si le point de départ est suffi-

samment voisin de la racine, on ne peut, dans la pratique du calcul, s'apercevoir que le point de départ est bon qu'après examen des premiers termes de la suite. Aussi certains procédés dits d'accélération de la convergence, notamment celui d'Aitken, s'avèrent très utiles et sont d'une application courante surtout quand l'itération n'est que du premier ordre.

Une autre difficulté concerne les racines voisines pour lesquelles les procédés habituels sont malcommodes ; la plupart des méthodes qu'on recommande ont un caractère empirique et ne donnent pas toujours des résultats pleinement satisfaisants.

Je laisse de côté les procédés graphiques de résolution, procédés qui furent employés de très bonne heure mais qui ne donnent qu'une approximation en général grossière des racines cherchées.

Dans ce travail qui est divisé en cinq chapitres, j'examinerai un procédé de construction d'itérations d'ordre de plus en plus élevé, applicables normalement aux équations algébriques, transcendantes, aux systèmes d'équations ainsi qu'à certaines équations matricielles. Le procédé est assez général pour englober la plupart des procédés itératifs connus et permettre de résoudre effectivement de façon plus ou moins heureuse les équations qui se posent dans la pratique.

Le premier chapitre traite de la construction de ce procédé itératif général que j'appelle procédé (P) . Dans le second chapitre, j'examine la convergence de la série dite itérative obtenue en prolongeant indéfiniment les formules d'itération déduites du procédé (P). Cette série itérative sous sa forme générale comprend certains développements bien connus obtenus par inversion de l'équation tels les procédés de Hamilton, Whittaker, Bodewig. La généralisation du procédé (P) à un système de plusieurs équations fait l'objet du chapitre III . Le problème des racines presque égales est esquissé au chapitre IV où j'ai tenté de mettre en évidence, à côté de quelques artifices qui simplifient les calculs dans certains cas, une méthode "d'agrandissement" des racines qui ramène les racines presque égales à des racines distinctes ordinaires. Enfin, dans le dernier chapitre, j'applique le procédé (P) à certaines équations matricielles et au problème des valeurs propres des matrices.

Les exemples numériques illustrant ce travail ont été volontairement choisis assez courts pour être traités simplement sur une machine de bureau. J'ai laissé entièrement de côté les procédés automatiques qui peuvent être déduits des méthodes générales, la programmation de tels procédés constituant un travail à part, trop long pour trouver sa place ici. Je me propose de les examiner dans des mémoires à publier ultérieurement.

Si ce travail a été mené à bien c'est en grande partie grâce aux conseils bienveillants et aux encouragements constants de Monsieur le Professeur D.PHAM à qui je dois en particulier mon initiation aux méthodes de l'Analyse Numérique ; qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

CHAPITRE I

LE PROCEDE (P)

1.1. - INTRODUCTION.

Pour résoudre une équation $f(x) = 0$ on connait de nombreuses méthodes d'itération de la forme :

$$x = \phi_p(x) = x + F(x)$$

Les méthodes du second ordre comme celle de Newton-Raphson, donnent lieu à des calculs simples quand la convergence est assurée, mais nécessitent un grand nombre d'itérations si la précision requise est grande. Les méthodes d'itération d'ordre élevé comme celle de König :

$$\phi_p(x) = \frac{(p-1)\left(\frac{1}{f}\right)^{(p-2)}}{\left(\frac{1}{f}\right)^{(p-1)}}$$

nécessitent, même dans les cas ordinaires, des calculs préparatoires laborieux pour p assez grand. D'autre part, quand on veut passer d'une itération d'ordre p à une itération d'ordre supérieur, l'expression de $\phi_p(x)$ est complètement changée. Le but de ce chapitre est de présenter une méthode d'itération générale, d'ordre p, définie par :

$$x_{N+1} = \phi(x_N) = x_N + F(x_N)$$

de telle manière que lorsqu'on passe de l'ordre p à l'ordre p+1 il suffise d'ajouter à $\phi_p(x)$ un terme complémentaire de forme simple. Dès qu'il y a convergence, la racine a de $F(x) = 0$ vers laquelle tend la suite $\{x_N\}$ se présente comme la somme d'une série :

$$a = \lim_{p=\infty} \phi_p(x_0)$$

la valeur initiale x_0 pouvant en général être choisie entre des limites assez larges.

*1.2. - **PROCEDE (P).***

Rappelons d'abord qu'une itération $\phi_p(x)$ est dite d'ordre p pour la racine a de F(x) si :

1.(1) $$\phi_p(x) = a + A(x-a)^p + B(x-a)^{p+1} + \ldots$$

ou :

1.(2) $$F_p(x) = -(x-a) + A(x-a)^p + B(x-a)^{p+1} + \ldots$$

Nous supposons $\phi_p(x)$ et $F_p(x)$ pourvues de toutes les dérivées successives nécessaires pour qu'elles puissent se développer par rapport aux puissances de (x-a).

Il est clair que si l'on ajoute à $F_p(x)$ ou $\phi_p(x)$ une fonction qui admet a comme racine multiple d'ordre p, l'itération obtenue est encore d'ordre p au moins et que, inversement, la différence de deux fonctions telles que $\phi_p(x)$ définissant des itérations de même ordre p est une fonction admettant a comme racine multiple d'ordre p au moins.

Ceci posé, je me propose de construire à partir de l'itération définie par 1.(1) ou 1.(2), d'ordre p ($p \geq 2$) une itération d'ordre p+1. En dérivant 1.(2) il vient :

$$F'_p(x) = -1 + Ap(x-a)^{p-1} + \ldots$$

et

$$\frac{1}{-} F_p(x) \left[1 + F'_p(x)\right] = -A(x-a)^p + \ldots$$

donc si l'on pose :

1.(3) $$F_{p+1}(x) = F_p(x) + \frac{1}{p} F_p(x) \left[1 + F'_p(x)\right]$$
$$= -(x-a) + C(x-a)^{p+1} + \ldots$$

la fonction :

1.(4) $$\phi_{p+1}(x) = x + F_{p+1}(x)$$

définit une itération d'ordre p+1 au moins. Le procédé qui consiste à construire $F_{p+1}(x)$ à partir de $F_p(x)$ sera appelé dans toute la suite "Procédé (P)".

1.3. - CONSTRUCTION D'ITERATIONS DU SECOND ORDRE.

Le raisonnement précédent ne s'applique pas pour $p = 1$ et dans ce cas, pour construire une itération d'ordre 2 à partir d'une itération du premier ordre, soit :

$$\phi(x) = x + F(x)$$

il suffit de poser :

$$\phi_2(x) = x - \lambda(x) F(x)$$

$\lambda(x)$ étant choisi pour que

$$\phi'_2(a) = 1 - \lambda(a) F'(a) = 0$$

1° ITERATION DE NEWTON-RAPHSON. -

a) Si la racine a de l'équation F(x) = 0 est simple, une solution possible consiste à prendre avec Newton-Raphson :

$$\lambda(x) = \frac{1}{F'(x)}$$

c'est à dire :

$$\phi_2(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

En effet si l'on pose :

$$F(x) = (x-a)\, g(x) \qquad \left[g(a) \neq 0\right]$$

un calcul élémentaire donne :

$$\phi_2(x) = a + (x-a)^2 \frac{g'(x)}{g(x)} + \ldots$$

b) Si a est une racine multiple d'ordre q , on peut prendre avec Newton :

$$\lambda(x) = \frac{q}{F'(x)}$$

c'est à dire :

$$\phi_2(x) = x - q\,\frac{F(x)}{F'(x)}$$

En effet, si l'on pose $F(x) = (x-a)^q\, g(x)$ $\left[g(a) \neq 0\right]$ on obtient facilement :

$$\phi_2(x) = a + q\,\frac{g'(x)}{g(x)}\,(x-a)^2 + \ldots$$

2° ITERATION POLYNOMIALE. –

Lorsque F(x) est un polynôme, il est possible de choisir pour $\lambda(x)$ également un polynôme.

a) La racine a de F(x) = 0 est simple et F(x) n'a pas de racines multiples, alors F(x) est premier avec sa dérivée F'(x) . L'identité de Bezout permet de construire un couple de polynômes $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ satisfaisant à :

$$\mu(x)\,F(x) + \lambda(x)\,F'(x) \equiv 1$$

Le polynôme $\lambda(x)$ ainsi déterminé permet de définir une itération :

$$\phi_2(x) = x - \lambda(x)\,F(x)$$

du second ordre puisque $\phi_2'(a) = 0$.

b) La racine a de F(x) = 0 est multiple d'ordre q .

Je suppose que l'équation F(x) = 0 admet a comme racine d'ordre q mais n'admet pas de racines d'ordre supérieur à q .

Il n'est pas possible alors de trouver une itération polynomiale de la forme indiquée au début de ce paragraphe. Je vais chercher une itération définie par :

$$1.(5) \qquad \phi_2(x) = x + \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i(x)\,F^{(i)}(x) \qquad \left\{F^{(i)}(x) = \frac{d^i}{dx^i}F(x)\right\}$$

Si a est racine q-uple $F(a) = F'(a) = \ldots = F^{(q-1)}(a) = 0$ et comme :

$$\phi_2'(x) = 1 + \sum_{i=0}^{q-1} \left[\lambda_i'(x)\, F^{(i)}(x) + \lambda_i(x)\, F^{(i+1)}(x)\right]$$

on doit avoir :

$$\phi_2'(a) = 1 + \lambda_{q-1}(a)\, F^{(q)}(a)$$

Les hypothèses faites sur les racines de $F(x) = 0$ montrent que F, F' ,.. .., F^q sont premiers entre eux dans leur ensemble. On va montrer qu'il est possible de trouver q polynômes $\mu_i(x)$: $(i = 1,2,\ldots,q)$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{q} \mu_i(x)\, F^{(i)}(x) \equiv 1$$

C'est la généralisation de l'identité de Bezout pour n polynômes premiers entre eux dans leur ensemble : pour trois polynômes A, B, C elle se vérifie aisément. En effet, soient D le P.G.C.D. de A et B

E le P.G.C.D. de B et C

$\frac{A}{D}$ et $\frac{B}{D}$ sont premiers entre eux, donc on peut trouver deux polynômes α et β tels que :

$$\alpha \frac{A}{D} + \beta \frac{B}{D} \equiv 1 \qquad \text{ou} \qquad \alpha A + \beta B \equiv D$$

De même $\frac{B}{E}$ et $\frac{C}{E}$ sont premiers entre eux et on peut trouver deux polynômes γ et δ tels que :

$$\gamma \frac{B}{E} + \delta \frac{C}{E} \equiv 1 \qquad \text{ou} \qquad \gamma B + \delta C \equiv E$$

D'autre part, D et E étant premiers entre eux il existe deux polynômes u et v tels que :

$$u D + v E \equiv 1$$

ou

$$u(\alpha A + \beta B) + v(\gamma B + \delta C) \equiv 1$$

$$\alpha u A + (\beta u + \gamma v) B + \delta v C \equiv 1$$

Supposons maintenant que, si n polynômes A_1 , A_2 ,..., A_n sont premiers entre eux dans leur ensemble , on puisse trouver n polynômes α_1, α_2 ,..., α_n tels que :

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n \equiv 1$$

Montrons que, pour n+1 polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, l'identité de Bezout est encore vraie.

Soient B le P.G.C.D. de A_1 , A_2 ,... , A_n

C le P.G.C.D. de A_2 , A_3 ,... , A_{n+1}

$\frac{A_1}{B}$, $\frac{A_2}{B}$,... , $\frac{A_n}{B}$ sont premiers entre eux, donc on peut déterminer n polynômes α_1 , α_2 ,... , α_n tels que :

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n \equiv B$$

De même $\frac{A_2}{C}$, $\frac{A_3}{C}$,... , $\frac{A_{n+1}}{C}$ étant premiers entre eux , il existe n polynômes β_1 , β_2 ,... , β_n tels que :

$$\beta_1 A_2 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_n A_{n+1} \equiv C$$

Mais B et C sont premiers entre eux, on peut donc trouver deux polynômes u et v tels que :

$$u B + v C \equiv 1$$

ou :

$$u(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n) + v(\beta_1 A_2 + \beta_2 A_3 + \ldots + \beta_n A_{n+1}) \equiv 1$$

$$\alpha_1 u A_1 + (\alpha_2 u + \beta_1 v) A_2 + \ldots + (\alpha_n u + \beta_{n-1} v) A_n + \beta_n v A_{n+1} \equiv 1$$

Ceci posé, pour que l'itération 1.(5) soit du second ordre , il suffit de prendre :

$$\lambda_{q-1}(x) \equiv - \mu_q(x)$$

les autres $\lambda_i(x)$ étant choisis arbitrairement.

Dans le cas particulier où l'équation algébrique n'admet pas de racines d'ordre supérieur à 2, on a à chercher trois polynômes μ_0, μ_1, μ_2, tels que :

$$\mu_0 f + \mu_1 f' + \mu_2 f'' \equiv 1$$

Si, comme c'est le cas général, f' et f" sont premiers entre eux , on peut déterminer deux polynômes ν_1 et ν_2 tels que :

$$\nu_1 f' + \nu_2 f'' \equiv 1$$

Il faut alors prendre : $\mu_0 \equiv 0$

et on a :

$$\lambda_1 \equiv -\mu_2 \equiv -\nu_2$$

REMARQUE :

Si on a à résoudre une équation algébrique n'admettant que des racines d'ordre 2 au maximum, soit $f(x) = 0$, on peut appliquer l'itération polynomiale :

$$\phi(x) = x + \lambda f + \mu f'$$

où λ est quelconque et $\mu = -\beta$
avec :

$$\alpha f' + \beta f'' \equiv 1$$

On peut, pour simplifier les calculs, choisir λ pour que le polynôme $\phi(x)$ soit de degré le plus bas possible.

EXEMPLE :

Soit l'équation :

$$f(x) \equiv x^5 - 2x^3 + x = 0$$

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$$

$$f''(x) = 20x^3 - 12x = 4x(5x^2 - 3)$$

Je détermine d'abord les polynômes α et β tels que :

$$\alpha f' + \beta f'' \equiv 1$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\alpha = -\frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\beta = \frac{15}{16}x^3 - \frac{13}{16}x$$

L'itération $\phi(x) = x + \lambda f + \mu f'$ s'écrit :

$$\phi(x) = x + (ax^2 + bx + c)(x^5 - 2x^3 + x) + (-\frac{15}{16}x^3 + \frac{13}{16}x)(5x^4 - 6x^2 + 1)$$

On choisit a, b, c, pour que l'itération polynomiale ϕ soit de plus bas degré possible.

Si l'on prend :

$$a = \frac{75}{16} \qquad b = 0 \qquad c = -\frac{5}{16}$$

d'où :

$$\phi(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}$$

$$F = \phi - x = -\frac{x}{2}(x^2 - 1)$$

on obtient une itération polynomiale de degré 3 alors que f(x) était de degré 5 .

A partir des itérations polynomiales du second ordre, comme à partir de l'itération de Newton-Raphson, le procédé (P) permet de construire des itérations d'ordre croissant.

EXEMPLES :

1° A partir de l'itération de Newton-Raphson $F_2 = -\frac{f}{f'}$ du deuxième ordre pour toute racine simple d'une équation $f(x) = 0$, on construit immédiatement, par le procédé (P) , l'itération du troisième ordre définie par :

1.(6) $$F_3 = -\frac{f}{f'} - \frac{f^2 f''}{2 f'^2}$$

2° Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique n'admettant que des racines simples . On peut, en partant de l'itération polynomiale du second ordre $\phi_2 = x - \lambda(x) f(x)$, avec $\lambda(x) f'(x) + \mu(x) f(x) \equiv 1$, construire, au moyen du procédé (P), une itération polynomiale du troisième ordre :

$$F_3 = F_2 + \frac{1}{2} F_2(1 + F_2') \qquad (F_2 = \phi_2 - x)$$

$$= -\lambda f - \frac{1}{2} \lambda f^2 (\mu - \lambda')$$

$$= -\lambda f \left[1 + \frac{1}{2}(\mu - \lambda') f\right] \qquad (\lambda f' + \mu f \equiv 1)$$

REMARQUE I

L'itération polynomiale du second ordre donne lieu à des calculs préparatoires plus longs et plus compliqués que l'itération de Newton-Raphson

mais il est facile d'obtenir sans calculs supplémentaires une itération polynomiale du troisième ordre, comme le montre ce dernier exemple, puisque les polynômes $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ sont déjà déterminés pour l'itération polynomiale du second ordre ; cette itération polynomiale du troisième ordre est plus simple que l'itération du même ordre déduite de celle de Newton-Raphson.

D'autre part, les polynômes $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ peuvent être obtenus, dans le cas des équations à coefficients numériques par des procédés mécaniques bien connus comme celui du produit en croix de Routh généralisé par D.PHAM*.

REMARQUE II

Il pourrait être intéressant de savoir qu'elle est, pour une racine donnée d'une équation algébrique $f(x) = 0$, la plus avantageuse, c'est à dire la plus rapidement convergente, des deux itérations du second ordre : Newton-Raphson et polynomiale. L'exemple suivant montre que parfois l'itération polynomiale peut être plus avantageuse.

Soit :

$$f(x) \equiv (x^2 + 1)(x - t) \equiv x^3 - t\,x^2 + x - t = 0$$

Un calcul élémentaire d'identification montre que :

$$\lambda\, f' + \mu\, f \equiv 1$$

avec :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{-t^2+3}{2(t^2+1)^2}\,x^2 + \dfrac{t}{2(t^2+1)}\,x + -\dfrac{t^2-1}{(t^2+1)^2} \\ \mu = \dfrac{3(t^2-3)}{2(t^2+1)^2}\,x + \dfrac{t(t^2+3)}{(t^2+1)^2} \end{cases}$$

Pour l'itération polynomiale $\phi = x - \lambda f$ relative à la racine $x = t$, on a :

$$\phi''(t) = \left[\mu(t) - \lambda'(t)\right] f'(t)$$

$$= \frac{t(t^2-11)}{t^2+1}$$

---

*Daniel PHAM : Sur la généralisation d'un procédé de Routh. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences n° 13, Séance du 31 mars 1958 pp. 1958-1960.

Pour l'itération de Newton-Raphson $\phi^*(x) = x - \frac{f}{f'}$ relative à la même racine $x = t$, on a :

$$\phi^{*\prime\prime}(t) = \frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{4\,t}{t^2+1}$$

Si donc t est tel que :

$$7 < t^2 < 15$$

on a :

$$|\phi''(t)| < |\phi^{*\prime\prime}(t)|$$

et l'itération polynomiale converge plus rapidement que l'itération de Newton-Raphson.

REMARQUE III

Nous venons de voir comment le procédé (P) permettait de construire une itération d'ordre p+1 à partir d'une itération d'ordre p pourvu que p soit au moins égal à 2 . Partons maintenant d'une itération du premier ordre pour une certaine racine a d'une équation $F(x) = 0$; soit par exemple :

$$\phi(x) = x + F(x)$$

d'où :

$$\phi(x) - a = x-a + F(x) = A(x-a) + B(x-a)^2 + \ldots$$

ou, en posant $x-a = \xi$:

$$\phi(x) - a = A\,\xi + B\,\xi^2 + \ldots$$

et par suite :

$$F(x) = (A-1)\,\xi + B\,\xi^2$$

Construisons à partir de F une itération F* par le procédé (P) de la façon suivante :

$$F^* = F + \frac{1}{2} F(1 + F')$$

c'est à dire en considérant F comme une itération du second ordre. Dans ces conditions, un calcul élémentaire donne :

$$F^* = \frac{(A-1)(A+2)}{2}\,\xi + \frac{3}{2} A\,B\,\xi^2 + \ldots$$

Signalons en passant que, si A = 0 donc si F est du second ordre, on trouve pour F* une itération du troisième ordre.

$$\phi^* - a = \frac{A(A+1)}{2} \xi + \frac{3}{2} A B \xi^2 + \ldots$$

Pour A = -1 on obtient une itération du second ordre alors que pour cette valeur de A l'itération $\phi(x)$ de départ était du premier ordre divergente. J'étudierai plus en détail au chapitre II l'ordre des itérations $\phi_p(x)$.

1.4. - CAS PARTICULIERS.

1° Cherchons pour les racines de $f(x) = 0$ une itération de la forme $\phi(x) = x + F(x)$ avec :

1.(7) $$F = \frac{\lambda(x)\, f(x)}{1 - \mu(x)\, f(x)}$$

où λ et μ sont deux fonctions finies au voisinage de la racine simple $x = a$ $f(x)$ étant infiniment petite en même temps que $x-a$, on peut développer $(1 - \mu f)^{-1}$ par rapport à f ; je néglige dans ce développement les termes à partir de f^3 et j'identifie avec l'itération 1.(6). Il vient successivement :

$$\lambda f (1 - \mu f)^{-1} = \lambda f (1 - \mu f + \ldots)$$

$$= \lambda f + \lambda \mu f^2 + \ldots$$

D'où je tire par identification avec 1.(6) :

$$\lambda = -\frac{1}{f'}$$

$$\lambda \mu = -\frac{f''}{2 f'^3} \qquad \mu = \frac{f''}{2 f'^2}$$

Par suite :

$$\frac{\lambda f}{1 - \mu f} = \frac{-\frac{f}{f'}}{1 - \frac{f f''}{2 f'^2}} = 2 \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right)}{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{f}\right)}$$

on retrouve l'itération de König d'ordre 3 .

2° En partant de l'itération polynomiale d'ordre 2 pour l'équation :

$$f(x) \equiv x^n - A = 0$$

soit :

$$F_2 = -\frac{x}{n\,A}(x^n - A)$$

on peut construire par le procédé (P) une itération polynomiale d'ordre 3 :

1.(8) $$F_3 = -\frac{x}{n\,A}(x^n-A) + \frac{(n+1)x}{2n^2\,A^2}(x^n-A)^2 = -\frac{x}{n\,A}f + \frac{(n+1)x}{2n^2\,A^2}f^2$$

Je cherche une itération de la même forme que précédemment 1.(7) :

$$F = \frac{\lambda f}{1 - \mu f}$$

et je développe par rapport à f :

$$F = \lambda f (1 - \mu f)^{-1} = \lambda f + \lambda \mu f^2 + \ldots$$

En identifiant avec 1.(8) j'obtiens :

$$\lambda = -\frac{x}{n\,A} \qquad \mu = \frac{n+1}{2n\,A}$$

D'où :

$$F = \frac{\frac{x}{n\,A}f}{1 + \frac{n+1}{2n\,A}f} = \frac{-2x\,f}{2n\,A + (n+1)f}$$

et :

$$\phi = x + F = x - \frac{2x\,f}{2n\,A + (n+1)f}$$

En remplaçant f par x^n-A et groupant les termes semblables, il vient finalement :

$$\phi = x\,\frac{(n-1)\,x^n + (n+1)\,A}{(n+1)\,x^n + (n-1)\,A}$$

c'est l'itération de Bailey.

3° Toujours pour l'équation $f(x) = x^n - A = 0$ on peut construire par le procédé (P) à partir de F_3 donné par 1.(8) une itération d'ordre 4 .

1.(9) $$F_4 = -\frac{x}{n\,A} f + \frac{(n+1)x}{2n^2\,A^2} f^2 - \frac{(n+1)(2n+1)x}{6n^3\,A^3} f^3$$

Cherchons maintenant une itération du quatrième ordre de la forme :

$$F = \frac{\lambda f}{1 - \mu f} + \nu f$$

où λ, μ, ν sont finies au voisinage de la racine simple de f . En développant comme précédemment et en identifiant avec 1.(9) il vient :

$$F = (\lambda + \nu)f + \lambda\,\mu\,f^2 + \lambda\,\mu^2\,f^3$$

et :

$$\begin{cases} \lambda + \nu = -\dfrac{x}{n\,A} & \lambda = -\dfrac{3(n+1)x}{2n(2n+1)A} \\ \lambda\,\mu = \dfrac{(n+1)x}{2n^2\,A^2} \quad \text{d'où} & \mu = -\dfrac{2n+1}{3n\,A} \\ \lambda\,\mu^2 = -\dfrac{(n+1)(2n+1)x}{6n^3\,A^3} & \nu = -\dfrac{(n-1)\,x}{2n(2n+1)A} \end{cases}$$

Dans le cas particulier d'une racine carrée n = 2

$$\lambda = -\frac{9x}{20A} \qquad \mu = -\frac{5}{6A} \qquad \nu = -\frac{x}{20A}$$

et l'on a l'itération du quatrième ordre :

1.(10) $$\phi = x + F = x\left[0{,}46 + 3{,}24\,\frac{A}{A + 5x^2} - 0{,}05\,\frac{x^2 - A}{A}\right]$$

1.5. - *DOMAINES DE CONVERGENCE D'UNE ITERATION $\phi(z)$.*

Plaçons-nous dans le domaine complexe. Soit une itération :

$$\phi(z) = z + F(z)$$

F(z) est supposée analytique dans tout le plan, uniforme et n'admettant que des singularités isolées. Soit a une racine de F(z) = 0 .

Le problème général de la recherche des domaines de convergence de l'itération $\phi(z)$ consiste à chercher des domaines tels que Δ , contenant a et *d'un seul tenant*, possèdant la propriété suivante :

z_0 étant un point quelconque intérieur à Δ , la suite $z_1 = \phi(z_0)$, ..., $z_{N+1} = \phi(z_N)$,... est entièrement intérieure à Δ et converge vers a .

Il ne semble pas facile a priori de déterminer le domaine maximum possèdant cette propriété . Je me contente de déterminer pour chaque racine a un domaine circulaire de centre a et possèdant cette propriété. En passant, on verra que dans un tel domaine Δ , la suite :

$$z_1 = \phi(z_0) \quad , \quad z_2 = \phi(z_1) = \psi(z_0,1) \ ,\ldots, \ z_{N+1} = \phi(z_N) = \psi(z_0,N) \ ,\ldots$$

considérée comme fonction de z_0 , converge uniformément vers la racine a quand z_0 décrit le domaine Δ .

1° CAS REEL

a) Itération du premier ordre :

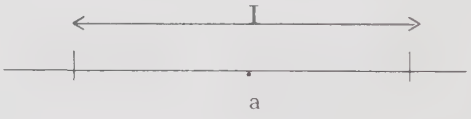
Rappelons d'abord ce cas élémentaire où on peut écrire :

$$x_1 - a = (x_0 - a)\,\phi'(\xi_0) \qquad \xi_0 \in (a, x_0)$$

.....

$$x_N - a = (x_{N-1} - a)\,\phi'(\xi_{N-1}) \qquad \xi_{N-1} \in (a, x_{N-1})$$

Si donc on peut trouver un intervalle I , de milieu a , tel que :



$$x \in I \longrightarrow |\phi'(x)| \leq k < 1$$

en prenant $x_0 \in I$ on a $\xi_0 \in I$ et $\left|\frac{x_1 - a}{x_0 - a}\right| \leq k < 1$ donc $x_1 \in I$ etc...

Tous les points de la suite $x_0, x_1, \ldots, x_N, \ldots$ appartiennent à l'intervalle I .

Comme :

$$|x_N - a| \leq k|x_{N-1} - a| \leq k^2|x_{N-2} - a| \leq \ldots \leq k^N|x_0 - a| \leq k^N L$$

où 2L désigne la longueur du segment I , on a démontré la convergence uniforme vers la racine a de la suite $\{x_N = x_N(x_0)\}$ considérée comme fonction de la variable $x_0 \in I$.

b) Itération d'ordre p ($p \geq 2$)

Prenons maintenant une itération d'ordre p

$$x_1 - a = (x_0-a)^p \frac{1}{p!} \phi^{(p)}(\xi_0) \qquad \xi_0 \in (a,x_0)$$

....

$$x_N - a = (x_{N-1}-a)^p \frac{1}{p!} \phi^{(p)}(\xi_{N-1}) \qquad \xi_{N-1} \in (a,x_{N-1})$$

Soit J un segment quelconque de milieu a dans lequel $\phi^{(p)}(x)$ est continue donc bornée, soit H la borne supérieure de $|\phi^{(p)}(x)|$ pour $x \in J$. Désignons par I un segment de milieu a, contenu dans J et tel que :

$$x_0 \in I \longrightarrow |x_0-a| \leq \sqrt[p-1]{\frac{p!\ k}{H}} \quad \text{avec} \quad 0 < k < 1$$

En d'autres termes, la longueur de I est la plus petite des deux longueurs :

$$J \quad \text{et} \quad 2 \cdot \sqrt[p-1]{\frac{p!\ k}{H}}$$

Avec ce choix de x_0 on a $\xi_0 \in (a,x_0) \subseteq J \longrightarrow |\phi^{(p)}(\xi_0)| \leq H$ et :

$$\left|\frac{x_1-a}{x_0-a}\right| \leq k < 1$$

donc :

$$x_1 \in (a,x_0) \subset I \subseteq J$$

puis :

$$\xi_1 \in (a,x_1) \subset I \subseteq J \longrightarrow |\phi^{(p)}(\xi_1)| \leq H \quad \text{etc...}$$

Plus généralement :

$$\left|\frac{x_N-a}{x_{N-1}-a}\right| \leq k < 1$$

Comme précédemment $|x_N-a| \leq k|x_{N-1}-a| \leq \ldots \leq k^N|x_0-a| < k^N L$ où 2L désigne la longueur de I. Donc la suite $\{x_N = x_N(x_0)\}$ converge uniformément vers a lorsque $x_0 \in I$.

Contrairement à une itération du premier ordre pour laquelle il n'existe pas toujours, pour chaque racine a, de segment I de milieu a dans lequel $|\phi'(x)| \leq k < 1$ — cette condition n'est satisfaite que si $|\phi'(a)| < 1$ —

pour une itération d'ordre p ($p \geq 2$) on peut toujours choisir J arbitraire de milieu a , H en résulte, donc I .

En d'autres termes, le domaine de convergence autour de la racine a, pour une itération d'ordre p ($p \geq 2$), n'est jamais nul pourvu que $\phi^{(p)}(x)$ soit bornée dans le voisinage de cette racine a . Cette propriété résulte évidemment de ce que $\phi'(a) = 0$ pour une telle itération.

2° CAS COMPLEXE

Les conclusions précédentes s'étendent aisément au domaine complexe. Il suffit de remplacer le développement de Taylor avec la forme du reste de Lagrange par :

$$\phi(z)-a = \phi(z) - \phi(a) = (z-a)\phi'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^p}{p!}\left[\phi^{(p)}(a) + (z-a)\,\chi_p(z)\right]$$

où $\chi_p(z)$ désigne une fonction holomorphe dans le voisinage de a .

a) Itération du premier ordre.

Dans le cas d'une itération du premier ordre on a :

$$\frac{z_1-a}{z_0-a} = \phi'(a) + (z_0-a)\,\chi_1(z_0)$$

Si donc $|\phi'(a)| < 1$ et si $M_1(r) = \underset{|z-a| \leq r}{\text{Max}} |\chi_1(z)|$ on a :

$$\left|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right| < |\phi'(a)| + r_0 M_1(r) < |\phi'(a)| + r_0 M_1(r)$$

où l'on a choisi r fixe supérieur à r_0 .

Le dernier membre sera moindre que 1 si l'on prend :

$$r_0 M_1(r) < 1 - |\phi'(a)| - \varepsilon$$

ou :

$$r_0 < \frac{1 - |\phi'(a)| - \varepsilon}{M_1(r)}$$

donc pour tout point intérieur à un cercle Γ de centre a et de rayon au plus égal à $\frac{1 - |\phi'(a)| - \varepsilon}{M_1(r)}$ et inférieur à r .

$$\left|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right| < 1 - \varepsilon$$

Donc z_1 sera encore à l'intérieur de Γ .

Le raisonnement fait dans le cas réel s'applique : $\{z_N = z_N(z_0)\}$ forme une suite uniformément convergente quand z_0 reste intérieur à Γ . On a déterminé le rayon L de ce cercle en choisissant d'abord un r fixe arbitraire, puis en formant :

$$r' = \frac{1 - |\phi'(a)| - \varepsilon}{M_1(r)}$$

où ε est choisi positif tel que $1 - |\phi'(a)| - \varepsilon$ soit encore positif . Le rayon L de Γ est le plus petit des deux nombres r et r' .

On voit sans peine que, pour une itération du premier ordre $\phi(z)$, la condition de convergence de la suite vers a, soit $|\phi'(a)| < 1$, est aussi une condition nécessaire.

b) Itération d'ordre p (p ≥ 2)

On a :

$$\left|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right| = \frac{(z_0-a)^{p-1}}{p!}\left[\phi^{(p)}(a) + (z_0-a)\,\chi_p(z_0)\right]$$

Si l'on pose :

$$M_p(r) = \operatorname*{Max}_{|x-a| \le r} |\chi_p(r)|$$

et :

$$H = |\phi^{(p)}(a)| + r\,M_p(r)$$

On a pour $|z_0-a| = r_0 < r$:

$$\left|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right| < \frac{r_0^{p-1}}{p!}\,H$$

Si donc on pose : $r' = \sqrt[p-1]{\dfrac{p!\ k}{H}}$ $\qquad (0 < K < 1)$

on a :

$$\left|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right| < k\left(\frac{r_0}{r'}\right)^{p-1} < 1 \quad \text{si} \quad r_0 \le r'$$

Le raisonnement se poursuit comme dans le cas réel . La convergence uniforme de la suite $\{z_n = z_n(z_0)\}$ vers la racine a a lieu à l'intérieur du cercle Γ de centre a dont le rayon est le plus petit des deux nombres r et

$$r' = \sqrt[p-1]{\frac{k\ p!}{H}} \qquad \text{(k arbitraire, compris entre 0 et 1)}$$

1.6. - *ITERATIONS MONOTONES - ITERATIONS ENVELOPPANTES*.

Par définition une itération convergente $\phi(x)$ sera dite monotone pour une racine a si la suite des itérés $\phi(x_0)$, $\phi(x_1)$,..., $\phi(x_N)$,.... finit par être monotone.

Une itération convergente $\phi(x)$ sera dite enveloppante pour la racine a si, à partir d'un certain rang , deux termes consécutifs quelconques de la suite des itérés $\phi(x_N)$ encadrent la racine a .

L'égalité :

$$\frac{x_{N+1}-a}{x_N-a} = (x_N-a)^{p-1}\left[\frac{\phi^{(p)}(a)}{p!} + \ldots\right]$$

valable pour une itération d'ordre p montre que :

a) Si p est pair (p = 2k) l'itération est toujours monotone, elle sera monotone décroissante, et la suite des itérés formera une suite monotone de valeurs approchées par excès, si la dérivée $\phi^{(2k)}(a)$ est positive. Si au contraire, $\phi^{(2k)}(a)$ est négative l'itération sera monotone croissante et la suite des itérés formera une suite monotone de valeurs approchées par défaut.

EXEMPLE :

Soit l'équation :

$$f(x) \equiv x^n - A = 0 \qquad (A > 0)$$

L'itération de Newton-Raphson :

$$\phi(x) = x - \frac{x^n - A}{n\ x^{n-1}}$$

est monotone décroissante ; $\phi''(x) = \frac{(n-1)A}{x^{n+1}}$ entraîne $\phi''(a) > 0$ $(a^n = A)$

L'itération polynomiale :

$$\left|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right| < 1 - \varepsilon$$

Donc z_1 sera encore à l'intérieur de Γ .

Le raisonnement fait dans le cas réel s'applique : $\{z_N = z_N(z_0)\}$ forme une suite uniformément convergente quand z_0 reste intérieur à Γ . On a déterminé le rayon L de ce cercle en choisissant d'abord un r fixe arbitraire, puis en formant :

$$r' = \frac{1 - |\phi'(a)| - \varepsilon}{M_1(r)}$$

où ε est choisi positif tel que $1 - |\phi'(a)| - \varepsilon$ soit encore positif . Le rayon L de Γ est le plus petit des deux nombres r et r' .

On voit sans peine que, pour une itération du premier ordre $\phi(z)$, la condition de convergence de la suite vers a, soit $|\phi'(a)| < 1$, est aussi une condition nécessaire.

b) Itération d'ordre p ($p \geq 2$)

On a :

$$\left|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right| = \frac{(z_0-a)^{p-1}}{p!}\left(\phi^{(p)}(a) + (z_0-a)\,\chi_p(z_0)\right)$$

Si l'on pose :

$$M_p(r) = \max_{|x-a| \leq r} |\chi_p(r)|$$

et :

$$H = |\phi^{(p)}(a)| + r\,M_p(r)$$

On a pour $|z_0-a| = r_0 < r$:

$$\left|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right| < \frac{r_0^{p-1}}{p!}\,H$$

Si donc on pose : $r' = \sqrt[p-1]{\frac{p!\,k}{H}}$ $\qquad (0 < K < 1)$

on a :

$$\left|\frac{z_1-a}{z_0-a}\right| < k\left(\frac{r_0}{r'}\right)^{p-1} < 1 \quad \text{si} \quad r_0 \leq r'$$

Le raisonnement se poursuit comme dans le cas réel. La convergence uniforme de la suite $\{z_n = z_n(z_0)\}$ vers la racine a a lieu à l'intérieur du cercle Γ de centre a dont le rayon est le plus petit des deux nombres r et

$$r' = \sqrt[p-1]{\frac{k\ p!}{H}} \qquad \text{(k arbitraire, compris entre 0 et 1)}$$

1.6. - *ITERATIONS MONOTONES - ITERATIONS ENVELOPPANTES*.

Par définition une itération convergente $\phi(x)$ sera dite monotone pour une racine a si la suite des itérés $\phi(x_0)$, $\phi(x_1)$,..., $\phi(x_N)$,.... finit par être monotone.

Une itération convergente $\phi(x)$ sera dite enveloppante pour la racine a si, à partir d'un certain rang , deux termes consécutifs quelconques de la suite des itérés $\phi(x_N)$ encadrent la racine a .

L'égalité :

$$\frac{x_{N+1}-a}{x_N-a} = (x_N-a)^{p-1}\left[\frac{\phi^{(p)}(a)}{p!} + \ldots\right]$$

valable pour une itération d'ordre p montre que :

a) Si p est pair (p = 2k) l'itération est toujours monotone, elle sera monotone décroissante, et la suite des itérés formera une suite monotone de valeurs approchées par excès, si la dérivée $\phi^{(2k)}(a)$ est positive. Si au contraire, $\phi^{(2k)}(a)$ est négative l'itération sera monotone croissante et la suite des itérés formera une suite monotone de valeurs approchées par défaut.

EXEMPLE :

Soit l'équation :

$$f(x) \equiv x^n - A = 0 \qquad (A > 0)$$

L'itération de Newton-Raphson :

$$\phi(x) = x - \frac{x^n - A}{n\ x^{n-1}}$$

est monotone décroissante ; $\phi''(x) = \frac{(n-1)A}{x^{n+1}}$ entraîne $\phi''(a) > 0$ $(a^n = A)$

L'itération polynomiale :

$$\phi(x) = x - \frac{x}{n\,A}(x^n - A)$$

est monotone croissante $\phi''(x) = -\frac{n+1}{A}x^{n-1}$ entraîne $\phi''(a) < 0$.

b) Si p est impair (p = 2k+1) l'itération est enveloppante ou monotone suivant que $\phi^{(2k+1)}(a)$ est négatif ou positif.

EXEMPLE :

Soit l'équation : $x^2 - A = 0$ $(A > 0 \; ; \; a = \sqrt{A})$

L'itération de Bailey :

$$\phi(x) = x\,\frac{x^2 + 3A}{3x^2 + A}$$

est monotone car $\phi'''(x) = \frac{-432\,A\,x^4 + 864\,A^2\,x^2 - 48\,A^3}{(3\,x^2 + A)^4}$ entraîne :

$$\phi'''(a) > 0 \qquad (\phi'''(a) = \frac{3}{2\,A})$$

une itération d'ordre impair, quand elle est monotone, est monotone décroissante.

La recherche des itérations enveloppantes présente un certain intérêt parce que deux itérés consécutifs donnent une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès à partir d'un certain rang.

J'y reviendrai au chapitre IV (à propos des racines presque égales).

1.7. - *ITERATIONS SELECTIVES - ITERATIONS FILTRANTES.*

Une itération $\phi(x)$ sera dite *q-filtrante supérieure* si elle est convergente pour toutes les racines d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à q, divergente pour les racines d'ordre de multiplicité inférieur à q.

Une itération $\phi(x)$ sera dite *q-filtrante inférieure* si elle est convergente pour toutes les racines d'ordre de multiplicité inférieur ou égal à q, divergente pour les racines d'ordre de multiplicité supérieur à q.

Une itération $\phi(x)$ sera dite *q-sélective d'ordre p* si elle est convergente d'ordre p pour les racines d'ordre de multiplicité égal à q, divergente pour toutes les autres racines.

Une itération $\phi(x)$ sera dite *universelle* si elle est convergente pour toutes les racines, quel que soit leur ordre de multiplicité.

EXEMPLES :

1° L'itération de Newton-Raphson $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est une itération universelle $\begin{cases}\text{du second ordre pour les racines simples,}\\ \text{du premier ordre pour les racines multiples.}\end{cases}$

En effet :

$$\phi(x) = a + (1 - \tfrac{1}{p})(x-a) + \ldots$$

[on a posé : $f(x) = (x-a)^p\, g(x)$ avec $g(a) \neq 0$]

2° L'itération de Newton $\phi(x) = x - q\,\frac{f(x)}{f'(x)}$ est une itération filtrante supérieure $\begin{cases}\text{du deuxième ordre pour les racines d'ordre q ,}\\ \text{du premier ordre pour les racines d'ordre} > \frac{q}{2}\ .\end{cases}$

En effet :

$$\phi(x) = a + (1 - \tfrac{q}{p})(x-a) + \ldots$$

avec les mêmes notations que ci-dessus.

3° L'itération $\phi(x) = x - \dfrac{f\,f'}{f'^2 - f\,f''} = x - \dfrac{1}{1 - \dfrac{f\,f''}{f'^2}}\,\dfrac{f}{f'}$

est une itération universelle du second ordre. Un calcul élémentaire montre en effet, que dans le développement de $\phi(x)-a$ par rapport aux puissances de x-a , le coefficient du terme en (x-a) est nul quel que soit l'ordre de multiplicité de la racine a .

CONSTRUCTION D'UNE ITERATION q-SELECTIVE.

Soit :

$$\phi(x) = x - Q(x)\,\frac{f}{f'}$$

$$Q(x) = q^2 \left[1 - \frac{f\,f''}{f'^2}\right] + A\,\frac{f^{(q-1)}\,f^{(q+1)}}{\left[f^{(q)}\right]^2}$$

$$Q(x) - a = (x-a) - \left[Q(a) + 0(1)(x-a)\right]\left[\frac{x-a}{p} + 0(1)(x-a)^2\right]$$

$$\frac{\phi(x) - a}{x-a} = 1 - \frac{Q(a)}{p} + 0(1)(x-a)$$

1° si a est racine d'ordre $p = q$ $\qquad Q(a) = q$

2° si a est " " $p > q$ $\qquad Q(a) = \frac{q^2}{p} + A\,\frac{p-q}{p-q+1}$

3° si a est " " $p < q$ $\qquad Q(a) = \frac{q^2}{p} + A\,T$

avec $\qquad T = \frac{f^{(q-1)}(a)\,f^{(q+1)}(a)}{\left[f^{(q)}(a)\right]^2}$

Par suite :

$$1 - \frac{Q(a)}{p} = 0 \qquad \text{si} \quad p = q$$

$$1 - \frac{Q(a)}{p} = 1 - \frac{q^2}{p^2} - A\,\frac{p-q}{p(p-q+1)} \qquad \text{si} \quad p > q$$

$$1 - \frac{Q(a)}{p} = 1 - \frac{q^2}{p^2} - A\,\frac{T}{p} \qquad \text{si} \quad p < q$$

Nous allons choisir A pour que dans les deux derniers cas l'itération diverge, donc :

$$\left| 1 - \frac{Q(a)}{p} \right| \geq 1$$

1° Si $p > q$

$$\frac{p-q}{p-q+1} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{donc} \qquad \frac{A(p-q)}{p(p-q+1)} \geq \frac{A}{2p} \geq \frac{A}{2n}$$

où n est le degré de l'équation.

$$\frac{A(p-q)}{p(p-q+1)} + \frac{q^2}{p^2} - 1 \geq \frac{A}{2p} + \frac{q^2}{p^2} - 1 \geq \frac{A}{2n} + \frac{q^2}{n^2} - 1 \geq \frac{A}{2n} + \frac{1}{n^2} - 1$$

Il suffit donc que :

$$A \geq 4n \quad \text{si} \quad p > q$$

2° *Si* $p < q$

a) $T > 0$ $\qquad \frac{A\,T}{p} + \frac{q^2}{p^2} - 1 \geq \frac{A\,T}{p}$

il suffit que : $\qquad A \geq \frac{q}{\min(T)}$

b) $T < 0$ $\qquad -\frac{A\,T}{p} - \frac{q^2}{p^2} + 1 \geq 1$

$$-\frac{A\,T}{p} \geq \frac{q^2}{p^2}$$

il suffit que : $\qquad A \geq \frac{q^3}{\min(-T)}$

donc si $p < q$ il suffit que l'on ait :

$$A \geq \frac{q^3}{\min|T|}$$

Donc, au total, pour que l'itération $\phi(x)$ ainsi construite soit q-sélective il suffit de prendre :

$$A \geq \max\left\{ 4n \, , \, \frac{q^3}{\min|T|} \right\}$$

CHAPITRE II

SERIES ITERATIVES

A. EXEMPLES ET APPLICATIONS

2.1. Soit $\phi_2(x) = x + F_2(x)$ une itération du second ordre pour une racine a de l'équation $f(x) = 0$. $F(x) = F_2(x)$ admet a comme racine simple car :

$$\phi_2(x) = x + F(x) = a + A\,(x-a)^2 + \ldots$$

et :

$$F(x) = -(x-a) + A\,(x-a)^2 + \ldots$$

$\phi_2'(a)$ étant nulle, la fonction :

$$G(x) = G_2(x) = \frac{1 + F'(x)}{F(x)}$$

admet a comme point ordinaire.

A partir de $F(x)$ le procédé (P) donne l'itération du troisième ordre :

$$F_3(x) = F(x) + \frac{1}{2!} F^2(x)\, G_2(x)$$

Nous allons montrer que l'on obtient une itération d'ordre p en prenant :

2.(1) $$F_p(x) = F\,G_1 + \frac{1}{2!}F^2\,G_2 + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}F^{p-1}\,G_{p-1}$$

où les fonctions G_k sont définies par les relations suivantes :

$$G_1 \equiv 1 \qquad G_2 \equiv G(x) \equiv \frac{1+F'}{F} \qquad G_k \equiv (k-1)\,G_2\,G_{k-1} + G'_{k-1}\,.$$

La formule, on l'a vu, est vraie pour $p = 3$. Supposons-la vérifiée jusqu'à l'ordre p et appliquons le procédé (P) pour construire une fonction que nous appellerons F^*_{p+1} . Il vient successivement :

$$F_p(x) = \sum_{q=1}^{p-1} \frac{F^q\,G_q}{q!}$$

$$F'_p(x) = \sum_{q=1}^{p-1} \frac{F^{q-1}\,F'\,G_q}{(q-1)!} + \sum_{q=1}^{p-1} \frac{F^q}{q!}\,G'_q$$

Mais :

$$F' = F\,G_2 - 1 \qquad \text{et} \qquad G'_q = G_{q+1} - q\,G_2\,G_q$$

d'où :

$$F'_p = \sum_{q=1}^{p-1} \frac{F^{q-1}\,G_q}{(q-1)!}(F\,G_2 - 1) + \sum_{q=1}^{p-1} \frac{F^q}{q!}(G_{q+1} - q\,G_2\,G_q)$$

$$= \sum_{q=1}^{p-1} \frac{F^q\,G_{q+1}}{q!} - \sum_{q=1}^{p-1} \frac{F^{q-1}\,G_q}{(q-1)!}$$

Tous les termes se détruisent deux à deux , à l'exception du dernier terme de la première somme et du premier de la seconde ; il reste :

$$F'_p = -1 + \frac{F^{p-1}}{(p-1)!}\,G_p$$

d'où :

$$F^*_{p+1} = F_p + \frac{1}{p}F_p\left(1 + F'_p\right) = F_p + \frac{1}{p!}F^p\,G_p + 0(F^{p+1})$$

Comme toutes les fonctions de la suite $\{G_k\}$ admettent a comme point ordinaire, $0(F^{p+1})$ contient au moins $(x-a)^{p+1}$ en facteur . On obtient donc bien une itération d'ordre p+1 en prenant :

$$F_{p+1} = F_p + \frac{1}{p!} F^p G_p$$

ce qui démontre la validité de la formule 2.(1) dans le cas général.

J'écrirai :

$$\phi_p(x) = x + F(x) G_1(x) + \frac{F^2(x)}{2!} G_2(x) + \ldots + \frac{1}{(p-1)!} F^{p-1}(x) G_{p-1}(x)$$

ou en notation opérationnelle :

$$\phi_p(x) = \left[1 + F G_1 + \frac{F^2}{2!} G_2 + \ldots + \frac{1}{(p-1)!} F^{p-1} G_{p-1}\right] x$$

Si $x^{(p)} = \phi_p(x_0)$ admet une limite quand p augmente indéfiniment, cette limite ne peut être qu'une racine a de l'équation $f(x) = 0$ et je conviens d'écrire :

$$a = \lim_{p=\infty} x^{(p)} = (\exp [F G])\, x_0$$

étant entendu que, dans le développement de l'exponentielle, G^p est à remplacer par G_p .

2.2. - *FORMULE DE BODEWIG.*

Considérons la série itérative :

$$I(z) = z + \frac{F G_1}{1!} + \frac{F^2 G_2}{2!} + \ldots + \frac{F^n G_n}{n!} + \ldots$$

z est réel ou complexe. Dans le cas particulier où l'itération de départ est l'itération de Newton, c'est à dire quand $F = -\frac{f}{f'}$, il est possible de mettre le terme général de la série itérative sous une autre forme. On a :

$$G_2 = G = \frac{1+F'}{F} = -\frac{f''}{f'} = f'^2 \left(\frac{1}{f'} \frac{d}{dz}\right) \frac{1}{f'}$$

Montrons que, de façon générale :

$$G_n = f'^n \left(\frac{1}{f'} \frac{d}{dz}\right)^{n-1} \frac{1}{f'}$$

On vient de voir que la propriété est vraie pour n = 2 . Supposons-la vraie jusqu'à n-1 . On en tire :

$$G_n = (n-1)\, G_2\, G_{n-1} + G'_{n-1}$$

$$= -(n-1)\,\frac{f''}{f'}\, f'^{n-1} \left(\frac{1}{f'}\,\frac{d}{dz}\right)^{n-2} \frac{1}{f'} + (n-1)\, f'^{n-2} \left(\frac{1}{f'}\,\frac{d}{dz}\right)^{n-2} \frac{1}{f'}$$

$$+ f'^{n-1}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f'}\,\frac{d}{dz}\right)^{n-2} \frac{1}{f'}$$

$$G_n = f'^{n} \left(\frac{1}{f'}\,\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \frac{1}{f'}$$ ce qui justifie l'assertion.

Il résulte de là :

$$I(z) = z - \frac{f}{f'} + \frac{f^2}{2!}\left(\frac{1}{f'}\,\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{f'} - \frac{f^3}{3!}\left(\frac{1}{f'}\,\frac{d}{dz}\right)^2 \frac{1}{f'} + \ldots$$

$$\ldots + (-)^n \frac{f^n}{n!}\left(\frac{1}{f'}\,\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \frac{1}{f'} + \ldots$$

On retrouve la formule de Bodewig*.

Je démontrerai plus loin que la série itérative I(z) de Bodewig converge dans un certain cercle contenant un seul zéro simple de $f(z) = 0$.

2.3. – EXEMPLES DE SERIES ITERATIVES.

2.3.I. – Racine n-ième de A à partir de l'itération de Newton-Raphson.

$$f(z) = z^n - A \qquad F(z) = \frac{A - z^n}{n\, z^{n-1}}$$

On en déduit :

$$G_2 = \frac{1+F'}{F} = -\frac{n-1}{z}$$

$$G_3 = 2\, G_2\, G_2 + G'_2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{z^2}$$

$$G_4 \quad 3\, G_2\, G_3 + G'_3 = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{z^3}$$

---

*BODEWIG : "Uber das Eulersche Verfahren zur Auflösung Numerischer Gleichungen" (Commentarii Mathematici Helvetici, vol.8, Fasc.1 , pp.1–4, 1935–36).

et de façon générale :

$$G_p = (p-1)\, G_2\, G_{p-1} + G'_{p-1} = (-)^{p-1} \frac{(n-1)(2n-1)\ldots[(p-1)n-1]}{z^{p-1}}$$

$$I(z) = z + \frac{A - z^n}{n\, z^{n-1}} - \frac{n-1}{2!\, z}\left[\frac{A - z^n}{n\, z^{n-1}}\right]^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{3!\, z^2}\left[\frac{A - z^n}{n\, z^{n-1}}\right]^3$$

$$= z\left[1 + \frac{1}{n}\frac{A-z^n}{z^n} + \frac{1}{2!}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left[\frac{A-z^n}{z^n}\right]^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left[\frac{A-z^n}{z^n}\right]^3 + \ldots\right]$$

on reconnait le développement en série de :

$$z\left[1 + \frac{A - z^n}{z^n}\right]^{\frac{1}{n}} = I(z)$$

La série est convergente pour $\left|\frac{A - z^n}{z^n}\right| < 1$

2.3.II. – Racine n-ième de A à partir de l'itération polynomiale.

$$f(z) = z^n - A \qquad F(z) = -\frac{z}{n\, A}\, z^n - A$$

On en déduit :

$$G_2 = \frac{n+1}{z}$$

$$G_3 = \frac{(n+1)(2n+1)}{z^2}$$

$$G_4 = \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{z^3}$$

et de façon générale :

$$G_p = \frac{(n+1)(2n+1)\ldots[(p-1)n+1]}{z^{p-1}}$$

$$I(z) = z - \frac{z}{n}\frac{z^n-A}{A} + \frac{z^2}{n^2}\left(\frac{z^n-A}{A}\right)^2 \frac{n+1}{2!\,z} - \frac{z^3}{n^3}\left(\frac{z^n-A}{A}\right)^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{3!\,z^2} + \dots$$

$$= z\left[1 - \frac{1}{n}\frac{z^n-A}{A} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{z^n-A}{A}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n}+2\right)\frac{1}{3!}\left(\frac{z^n-A}{A}\right)^3 + \dots\right]$$

On reconnait le développement en série de :

$$z\left(1 + \frac{z^n-A}{A}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

Cette série est convergente pour $\left|\frac{z^n - A}{A}\right| < 1$

Dans les deux cas que je viens d'étudier, il est facile de déterminer le domaine Δ de convergence de la série $I(z)$.

Supposons A réel positif et posons $z = \rho\, e^{i\omega}$

Un calcul élémentaire montre que dans le premier cas :

$$I(z) = z\left(1 + \frac{A - z^n}{z^n}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

z doit être "à l'intérieur" de la courbe d'équation polaire :

$$\rho = \sqrt{\frac{A}{2\cos n\,\omega}}$$

(l'intérieur étant ici la région qui ne contient pas le pôle),
et dans le second cas :

$$I(z) = z\left(1 + \frac{z^n - A}{A}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

z doit être à l'intérieur des boucles du "trèfle" à n feuilles

$$\rho = \sqrt{2A\cos n\,\omega}$$

Ces deux courbes sont inverses l'une de l'autre , le pôle d'inversion étant le pôle 0 et la puissance $\sqrt[n]{A^2}$

La figure ci-dessous donne à la même échelle, les domaines Δ de convergence pour les deux itérations avec la localisation des racines dans le cas n=4 .

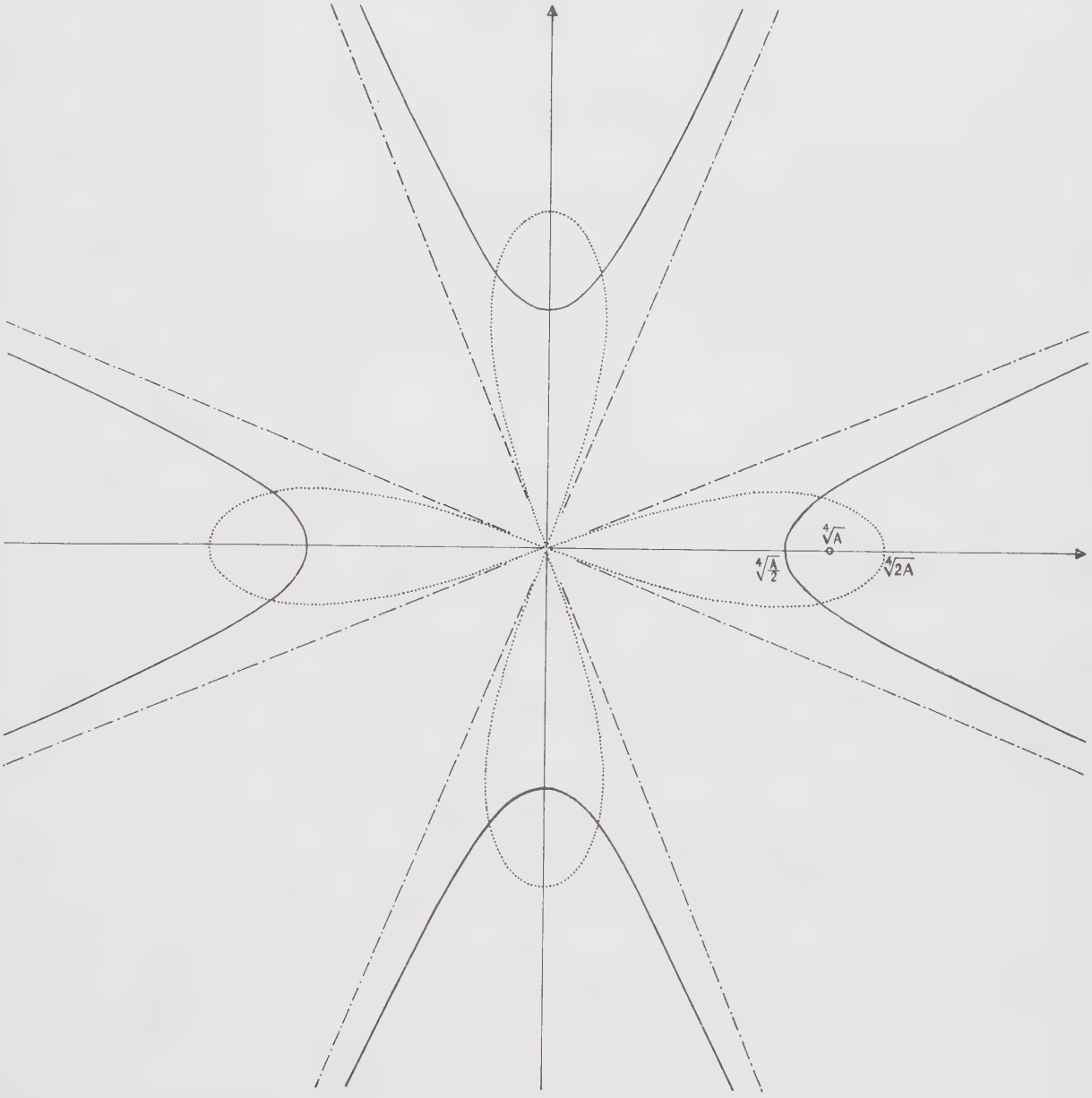


Fig. 2.1.

2.3.III. – Inverse d'un nombre à partir de l'itération polynomiale.

$$f(z) = 1 - Az = 0$$

$$F(z) = z\,(1 - Az)$$

On en déduit :

$$G_2 = \frac{2!}{z}$$

$$G_3 = \frac{3!}{z^2}$$

$$G_4 = \frac{4!}{z^3}$$

et de façon générale :

$$G_p = \frac{p!}{z^{p-1}}$$

$$I(z) = z + z(1 - Az) + \frac{2!}{z}\frac{1}{2!}z^2(1 - Az)^2 + \frac{3!}{z^2}\frac{1}{3!}z^3(1 - Az)^3 + \ldots$$

$$= z\left[1 + (1 - Az) + (1 - Az)^2 + (1 - Az)^3 + \ldots\right]$$

On reconnait le développement en série de

$$I(z) = z\left[1 - (1 - Az)\right]^{-1}$$

Cette série est convergente si $|1 - Az| < 1$ c'est à dire si $\left|z - \frac{1}{A}\right| < \left|\frac{1}{A}\right|$ donc pour z situé à l'intérieur du cercle de centre $\frac{1}{A}$ passant par 0 .

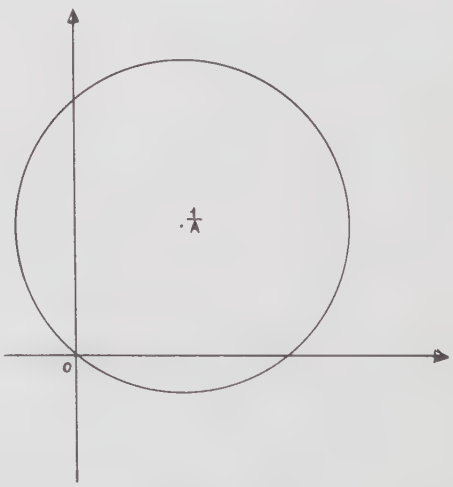


Fig. 2.2.

2.3.IV. – Logarithme d'un nombre A.

$$f(z) = 1 - A\,e^{-z}$$

L'itération de Newton-Raphson donne :

$$F(z) = -\frac{f}{f'} = -\frac{1 - A\,e^{-z}}{A\,e^{-z}} = 1 - \frac{e^z}{A}$$

On en déduit :

$$G_2 = \frac{1 + F'}{F} = 1$$

$$G_3 = 2\, G_2\, G_2 = 2!$$

$$G_4 = 3\, G_3\, G_2 = 3!$$

et de façon générale :

$$G_p = (p-1)\, G_{p-1}\, G_2 = (p-1)!$$

D'où :

$$I(z) = z + F + \frac{F^2}{2} + \frac{F^3}{3} + \ldots + \frac{F^p}{p} + \ldots$$

$$I(z) = z - \log (1 - F)$$

La série converge pour $|F| = \left|1 - \frac{e^z}{A}\right| < 1$

Posons $A = a + i\, b$ et supposons, pour fixer les idées, a et $b > 0$.
Tout revient à construire la courbe :

$$x = \log |2\, a \cos y + 2\, b \sin y| \qquad (z = x + i\, y)$$

la variation de y est limitée à l'intervalle $\alpha - \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \frac{\pi}{2}$ où α est tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Le domaine de convergence de la série itérative est composé des portions du plan, limitées par les branches de la courbe précédente et contenant les points $\alpha + k\, \pi$. (Cf. figure page suivante)

2.3.V. – Inversion de la fonction d'erreur.

Soit à résoudre : $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, k$

ou :

$$f(z) = \int_0^z e^{-t^2}\, dt - k = 0$$

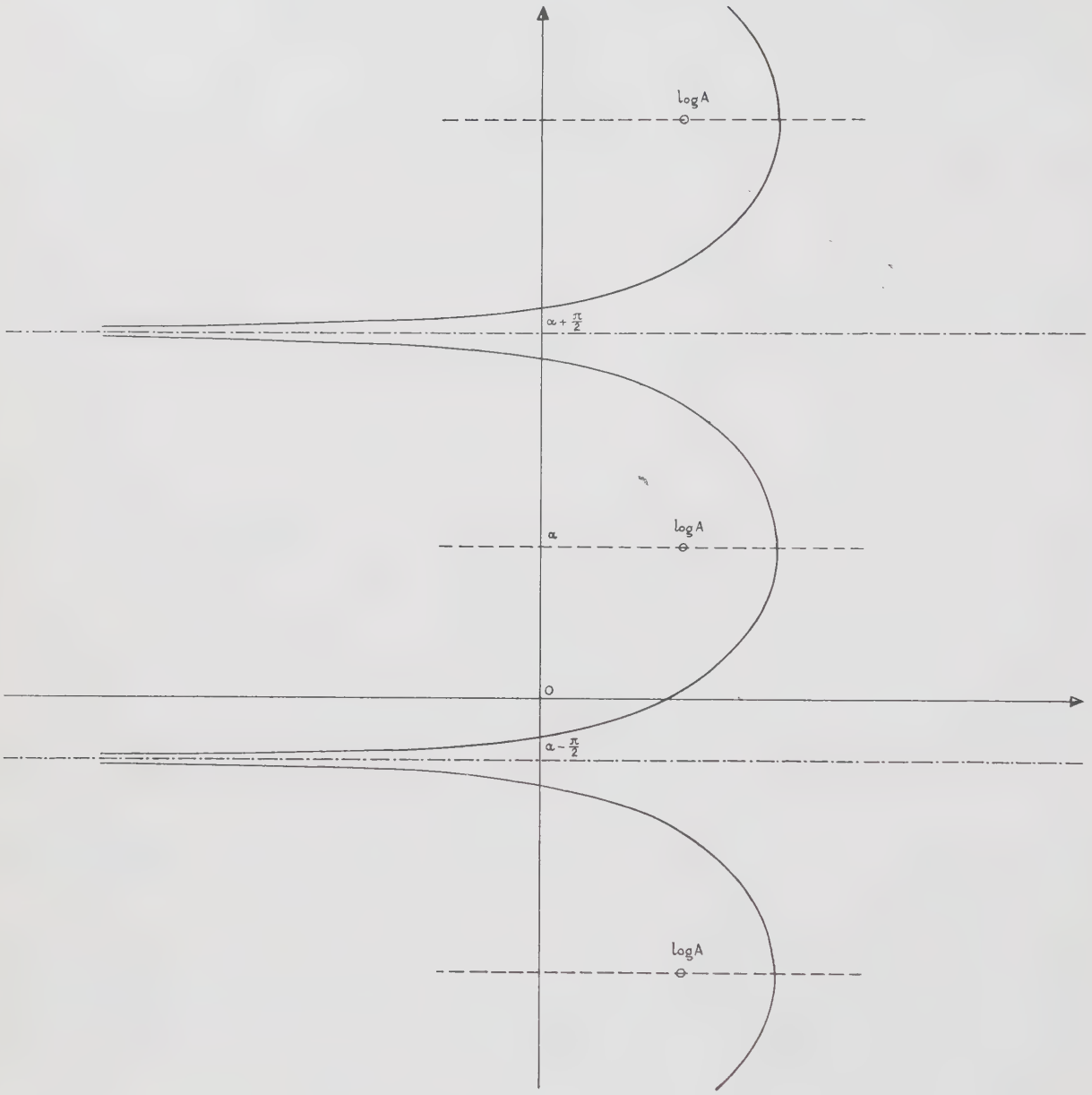


Fig. 2.3.

L'itération du second ordre de Newton donne :

$$F(z) = -e^{z^2}\left\{\int_0^z e^{-t^2}\,dt - k\right\}$$

On en déduit :

$$G_2 = \frac{1 + F'}{F} = 2z$$

$$G_3 = 2\left[(2z)^2\right] + 2 = 2!\left[(2z)^2 + 1\right]$$

$$G_4 = 3!\left[(2z)^3 + (2z)\right] + 2^3(2z) = 3!\left[(2z)^3 + (1 + \frac{2.2}{3})(2z)\right]$$

$$G_5 = 4!\left[(2z)^4 + (1+\frac{2.2}{3})(2z)^2\right] + 2.3!\left[3(2z)^2 + (1+\frac{2.2}{3})\right]$$

$$= 4!\left[(2z)^4 + (1+\frac{2.2}{3} + \frac{2.3}{4})(2z)^2 + \frac{2}{4}(1+\frac{2.2}{3})\right]$$

$$G_6 = 5!\left[(2z)^5 + (1+\frac{2.2}{3} + \frac{2.3}{4})(2z)^3 + \frac{2}{4}(1+\frac{2.2}{3})(2z)\right]$$

$$+ 2.4!\left[4(2z)^3 + 2(1+\frac{2.2}{3} + \frac{2.3}{4})(2z)\right]$$

$$G_6 = 5!\left[(2z)^5 + (1+\frac{2.2}{3} + \frac{2.3}{4} + \frac{2.4}{5})(2z)^3 + \left\{\frac{2}{4}(1+\frac{2.2}{3}) + \frac{2.2}{5}(1+\frac{2.2}{3} + \frac{2.3}{4})\right\}(2z)\right]$$

$$I(z) = z + F + \frac{2z\,F^2}{2} + \frac{(2z)^2+1}{3}F^3 + \frac{(2z)^3 + (1+\frac{2.2}{3})(2z)}{4}F^4 + \ldots$$

$$\text{avec} \qquad F = -e^{z^2}\left[\int_0^z e^{-t^2}\,dt - k\right]$$

Une méthode analogue s'applique à l'inversion de l'intégrale :

$$\int_0^z e^{-P(t)}\,dt \quad \text{où} \quad P(t) \text{ est un polynôme.}$$

On a à résoudre l'équation : $f(z) = \int_0^z e^{-P(t)}\,dt - k = 0$

La méthode de Newton donne immédiatement :

$$F = -e^{P(t)}\left[\int_0^z e^{-P(t)}\,dt - k\right]$$

d'où :

$$G = \frac{1 + F'}{F} = P'(z)$$

La suite G_k est une suite de polynômes que l'on peut former de proche en proche comme ci-dessus.

EXEMPLE :

$$f(z) = \int_0^z e^{-t^2}\,dt - 0,46 = 0$$

Je prends pour valeur approchée de z : $z_0 = 0,5$

$$F = -e^{0,25}\left[\int_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt - 0,46\right] = -1,644\,870 \cdot 10^{-3}$$

$G_2 = 1$ $\qquad$ $G_4 = 20$

$G_3 = 4$ $\qquad$ $G_5 = 144$

En se limitant à quatre termes, on obtient :

$$I(z) = 0,5 - 1,644\,870 \cdot 10^{-3} + 1,352\,799 \cdot 10^{-6} - 2,967 \cdot 10^{-9}$$

$$z = 0,498\,356\,480$$

A partir de la table de Boll (pp.634-635) qui fournit les valeurs de f(z) de centième en centième avec sept décimales, un calcul par interpolation, au moyen du schéma de Neville à cinq points, donne : 0,498 356 485.

2.3.VI. - *Inversion d'une fonction transcendante définie par une intégrale de la forme* $\int_a^z \frac{dt}{\varphi(t)}$

Autrement dit, soit à résoudre l'équation :

$$f(z) = \int_a^z \frac{dt}{\varphi(t)} - k = 0$$

L'itération de Newton donne :

$$F = -\frac{f}{f'} = -\varphi(z)\left[\int_a^z \frac{dt}{\varphi(t)} - k\right]$$

et :

$$G = \frac{1 + F'}{F} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

On suppose connues, une valeur approchée z_o de la racine ainsi que la valeur de l'intégrale :

$$\int_a^{z_o} \frac{dt}{\varphi(t)}$$

La construction de la série itérative I(z) se fait comme dans le cas précédent.

EXEMPLE :

Soit à résoudre :

$$\int_o^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}} = 0,4932 \quad \text{où} \quad a = \sin 70°$$

Je pars de la valeur approchée : $\alpha_o = 28°$; d'où $\int_o^{\alpha_o} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}} = 0,5067$

J'obtiens successivement :

$$\varphi(\alpha_o) = 0,897\ 428\ 688$$

$$\varphi'(\alpha_o) = -0,407\ 865\ 035$$

et :

$$F = -0,897\ 428\ 688\ [0,5067 - 0,4932] = -0,012\ 115\ 287$$

$$G_2 = -\frac{\varphi'(\alpha_o)}{\varphi(\alpha_o)} = 0,454\ 481\ 833$$

$$G_3 = 2\,G_2\,G_2 + G_2' = 3\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - \frac{\varphi''}{\varphi} = 1,303\ 722\ 748$$

d'où, en s'en tenant à quatre termes :

$$I(\alpha) = 28° + 57,295\ 779\ 513\left[-0,012\ 115\ 287 + 6,6709.10^{-5} - 3,86.10^{-7}\right]$$

$$I(\alpha) = 28° 307 = 28° 18' 25''$$

Un calcul par interpolation, au moyen du schéma de Neville à cinq points, donne, à partir de la table E.Jahnke et F.Emde (p.66) :

$$28^\circ\ 3053 \;=\; 28^\circ\ 18'\ 19''$$

2.3.VII. – Application au calcul de certaines intégrales.

La série itérative I(z) peut dans certains cas, être utilisée pour calculer une intégrale définie.

Soit, en effet, l'intégrale :

$$J \;=\; \int_a^b \varphi(t)\, dt$$

et soit A une valeur approchée de J .
Considérons l'équation :

$$f \;=\; \int_a^x \varphi(t)\, dt - A \;=\; 0$$

On a :

$$f'(x) \;=\; \varphi(x)$$

$$F \;=\; -\frac{f}{f'} \;=\; -\frac{f}{\varphi} \qquad \text{et} \qquad G \;=\; \frac{1 + F'}{F} \;=\; -\frac{\varphi'}{\varphi}$$

On obtient donc :

$$x \;=\; a + F(a) + \frac{F^2(a)\, G_2(a)}{2!} + \frac{F^3(a)\, G_3(a)}{3!} + \ldots$$

ce qui signifie que l'on prend a comme valeur approchée de x , donc que l'intervalle (a,x) est petit.

$$F(a) \;=\; \frac{A}{\varphi(a)} \qquad\qquad G_2(a) \;=\; \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}$$

d'où :

2.(2)
$$x \;=\; a + \frac{A}{\varphi(a)} + \frac{A^2}{2!\,\varphi^2(a)}\, G_2(a) + \frac{A^3}{3!\,\varphi^3(a)}\, G_3(a) + \ldots$$

Dans le cas où la suite G_k est facile à former, donc $G_k(a)$ facile à obtenir, on a une bonne approximation de J en résolvant par itérations successives l'équation 2.(2) dans laquelle on néglige tous les termes à partir d'un certain rang.

EXEMPLES :

a) Soit à calculer $\int_0^{0,1} e^{-t^2}\,dt$

On a : $a = 0$ $\varphi(t) = e^{-t^2}$ d'où $\varphi(a) = 1$

$G_2 = 2\,t$ $G_2(o) = 0$

$G_3 = 8\,t^2 + 2$ $G_3(o) = 2$

$G_4 = 48\,t^3 + 28\,t$ $G_4(o) = 0$

$G_5 = 384\,t^4 + 368\,t^2 + 28$ $G_5(o) = 28$

$G_6 = 3840\,t^5 + 5216\,t^3 + 1016\,t$ $G_6(o) = 0$

$G_7 = 46\,080\,t^6 + 81\,792\,t^4 + 27\,840\,t^2 + 1016$ $G_7(o) = 1\,016$

$G_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 69\,904$ $G_8(o) = 0$

$G_9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 69\,904$ $G_9(o) = 69\,904$

Si l'on s'en tient aux trois premiers termes non nuls de la série, il vient :

$$0,1 = A + \frac{A^3}{3} + 7\,\frac{A^5}{30}$$

ou :

$$7\,A^5 + 10\,A^3 + 30\,A - 15 = 0$$

En prenant $A = 0,1$ comme première approximation, on obtient :

$f(0,1) = 0,010\,07$

$f'(0,1) = 30,309\,5$

$\frac{f}{f'} = 0,000\,332\,305$

$$A^* = A - \frac{f}{f'} = \underline{0,099\,667\,695}$$

ou en ne conservant que 7 décimales :

$$A^* = \underline{0,099\,667\,7}$$

ce qui est la valeur donnée par les tables à 7 décimales.

b) $\int_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt$

Prenons les cinq premiers termes non nuls, il vient :

$$0,5 = \frac{A}{1} + \frac{A^3}{3} + \frac{7\,A^5}{30} + \frac{127\,A^7}{630} + \frac{4369\,A^9}{22\,680}$$

ou :

$$4369\,A^9 + 4572\,A^7 + 5292\,A^5 + 7560\,A^3 + 22\,680\,A - 11\,340 = 0$$

$$f(0,46) = -38,389\,600 \qquad \frac{f}{f'} = 0,001\,322$$

$$f'(0,46) = 29\,045,867\,472$$

$$A^* = A - \frac{f}{f'} = \underline{0,461\,32}$$

Les tables à 7 décimales donnent <u>0,461 281 0</u> ; l'erreur est de 4.10^{-5} .

<u>REMARQUE</u> :

La précision du résultat peut être améliorée en fractionnant l'intervalle d'intégration.

Ainsi pour calculer :

$$\int_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt$$

si j'utilise la valeur trouvée plus haut pour $\int_0^{0,1} e^{-t^2}\,dt$

et si je partage l'intervalle (0,1 ; 0,5) en deux parties égales, j'obtiens, en m'arrêtant dans le développement au terme :

$$\frac{G_7}{7!}\left[\frac{A}{\varphi(a)}\right]^7$$

$$\int_{0,1}^{0,3} e^{-t^2}\,dt = 0,191\,571$$

$$\int_{0,3}^{0,5} e^{-t^2}\,dt = 0,170\,046$$

d'où :

$$\int_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt = 0,461\,285$$

L'erreur n'est plus que de 4.10^{-6} .

B. CONVERGENCE DES SERIES ITERATIVES.

2.4. – Dans tout ce qui suit, je me borne à considérer les fonctions $F(z)$ analytiques dans un certain domaine du plan de la variable complexe z et n'admettant dans ce plan que des singularités isolées. Il en est donc de même de la fonction :

$$G(z) = \frac{1 + F'(z)}{F(z)}$$

Je considère la série itérative :

$$I(z) = \exp[F\ G]z = z + \frac{F\ G_1}{1!} + \frac{F^2\ G_2}{2!} + \ldots + \frac{F^n\ G_n}{n!} + \ldots$$

où la suite des fonctions $\{G_k\}$ est définie par :

$$G_1(z) \equiv 1 \quad , \quad G_2(z) \equiv G(z) \quad , \ldots , \quad G_{k+1}(z) \equiv k\ G\ G_k + G_k'$$

Cette suite de fonctions est analytique dans le même domaine de définition que $F(z)$.

Je pose :

$$\phi(z) = \phi_2(z) = z + F(z)$$

et de façon générale :

$$\phi_{N+1}(z) = \phi_N(z) + \frac{F^N(z)\ G_N(z)}{N!}$$

de sorte que $\phi_N(z)$ est la somme des N premiers termes de la série $I(z)$. L'itération $\phi(z)$ est appelée itération initiale. Elle est construite en principe pour calculer les racines d'une certaine équation $f(z) = 0$. Mais je ne fais aucune hypothèse a priori sur l'ordre de l'itération initiale par rapport à une racine de $f(z) = 0$, c'est à dire de $F(z) = 0$.

En particulier, si l'itération initiale est du second ordre par rapport à une racine Z^* de $F(z) = 0$, l'itération $\phi_N(z)$ est exactement d'ordre N par rapport à la même racine comme le prouve le procédé (P) exposé au premier chapitre. Mais si $\phi(z)$ est d'ordre $q \neq 2$, les itérations ϕ_3 , ϕ_4 , ..., ϕ_N ,.. sont, *en général*, d'ordre q par rapport à la racine considérée. Les cas d'exception importants seront signalés par la suite.

Les remarques suivantes sont manifestes :

a) Si l'itération initiale est d'ordre égal ou supérieur à 2 par rapport à une racine Z*, cette racine est racine simple de F(z), et G(z) est holomorphe en Z* car :

$$F(z) = -(z - Z^*) + A(z - Z^*)^q + \ldots \qquad q \geq 2$$

b) Si l'itération initiale est du premier ordre par rapport à la racine Z*, cette racine est, *en général*, racine simple de F(z) = 0 sauf si l'itération vérifie $\phi'(Z^*) = 1$ [donc $F'(Z^*) = 0$] auquel cas, F(z) admet Z* comme racine d'ordre supérieur ou égal à 2 .

Inversement :

c) Si Z* est racine simple de F(z) = 0, c'est aussi un pôle simple de G(z) si $1 + F'(Z^*) \neq 0$, c'est à dire si l'itération initiale est du premier ordre ; mais c'est un point d'holomorphie de G(z) si l'itération initiale est du second ordre au moins.

d) Si Z* est une racine multiple de F(z) = 0, l'itération initiale est du premier ordre par rapport à Z* et $\phi'(Z^*) = 1$; elle est du type divergent *en général* ; G(z) admet Z* comme pôle de même ordre de multiplicité.

2.5. – *DOMAINE DE CONVERGENCE DE I(z).*

J'appelle Δ le domaine total du plan de la variable complexe z dans lequel tous les termes :

$$\frac{F^n(z)\, G_n(z)}{n!}$$

sont des fonctions holomorphes et où la série itérative I(z) converge absolument et uniformément.

On verra qu'en général le domaine Δ n'est pas d'un seul tenant, en ce sens qu'on ne peut joindre deux quelconques de ces points par une courbe continue située tout entière à l'intérieur de Δ .

La détermination de Δ ou tout au moins des portions de Δ, et la localisation des racines cherchées par rapport à de telles portions constituent un problème essentiel dans la théorie de l'itération.

Dans la première partie de ce chapitre, j'ai indiqué dans quelques cas simples la construction de ce domaine Δ .

1er THEOREME FONDAMENTAL.

Dans tout domaine Δ' d'un seul tenant strictement intérieur à Δ et limité par une ou plusieurs courbes rectifiables, la série itérative prend une valeur constante.

DEMONSTRATION :

Par hypothèse, dans Δ, donc dans Δ', $I(z)$ converge absolument et uniformément. Comme les termes de $I(z)$ sont holomorphes et continus sur la frontière de Δ', d'après le théorème classique de Weierstrass sur la limite d'une suite de fonctions holomorphes, $I(z)$ est une fonction holomorphe et $I'(z)$ s'obtient en dérivant $I(z)$ terme à terme. On a :

$$I'(z) = 1 + F'(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F^{n-1} G_n F' + F^n G_n'}{n!}$$

En remplaçant F' par $G F - 1$ puis $n G G_n + G_n'$ par G_{n+1} on obtient finalement :

$$I'(z) = 1 + F' + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^n G_{n+1}}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{n-1} G_n}{(n-1)!}$$

$$= 1 + F' - F G = 0 .$$ c.q.f.d.

COROLLAIRE DU 1er THEOREME FONDAMENTAL.

Si le domaine Δ' du premier théorème fondamental contient une racine Z^* de $F(z) = 0$, la série itérative $I(z)$ converge vers Z^* pour tout $z \in \Delta'$ si $G(z)$ est holomorphe en Z^*.

Ceci résulte immédiatement de ce que $I(z)$ est constant dans Δ' et que $I(Z^*) = Z^*$, car tous les autres termes de la série itérative sont nuls pour $z = Z^*$, $F(Z^*)$ étant nulle et $G(z)$ donc $G_n(z)\ldots$ étant holomorphe en Z^*. C'est le cas si l'itération initiale est du second ordre au moins pour la racine Z^*, comme on l'a vu au début de la partie B.

2.6. - ORDRE DES ITERATIONS $\phi_N(z)$.

PREMIER CAS :

L'itération initiale est du premier ordre par rapport à une racine Z^* de $F(z)$:

$$\phi(z) = Z^* + a(z - Z^*) + \dots$$

Pour abréger l'écriture je pose :

$$\xi = z - Z^* \qquad \text{et} \qquad \alpha = a - 1$$

a) $\underline{\phi'(Z^*) = a \neq 1}$

$$F(z) = (a-1)\,\xi + \dots = \alpha\,\xi + \dots$$

$$G(z) = \frac{g}{\xi} \qquad \text{avec} \qquad g = \frac{a}{a-1} = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

$$G_2(z) = \frac{g_2}{\xi^2} + \dots \qquad \text{avec} \qquad g_2 = g(2g-1)$$

Plus généralement :

$$G_n(z) = \frac{g_n}{\xi^{n-1}} + \dots \qquad \text{avec} \qquad g_n = g_{n-1}\left[(n-1)g - (n-2)\right]$$

d'où :

$$g_n = g(2g-1)(3g-2)\dots\left[(n-1)g-(n-2)\right] = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-2)}{(a-1)^{n-1}}$$

$$g_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\alpha^n}$$

et :

$$\frac{F^n(z)\,G_n(z)}{n!} = \frac{(\alpha^n\,\xi^n + \dots)}{n!}\left[\frac{g_n}{\xi^{n-1}} + \dots\right]$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}{n!}\,\xi + \dots$$

Finalement :

$$2.(8) \qquad \begin{cases} \phi_N(z) = Z^* + a_N(z - Z^*) + \dots \\ a_N = 1 + \dfrac{\alpha}{1!} + \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!} + \dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} + \dots + \dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+N-2)}{(N-1)!} \end{cases}$$

b) $\phi'(Z^*) = a = 1$

$$\phi(z) = Z^* + (z - Z^*) + b(z - Z^*)^q + \ldots \qquad (q \geq 2)$$

$$F(z) = b(z - Z^*)^q + \ldots = b\,\xi^q + \ldots$$

$$G(z) = \frac{g}{\xi^q} + \ldots \qquad \text{avec} \qquad g = \frac{1}{b}$$

$$G_3(z) = \frac{g_3}{\xi^{q+1}} + \ldots \qquad \text{avec} \qquad g_3 = -\,q\,g$$

Plus généralement :

$$G_p(z) = \frac{g_p}{\xi^{q+p-2}} + \ldots \qquad \text{avec} \qquad g_p = -(q+p-3)\,g_{p-1}$$

d'où :

$$g_n = (-)^{n-2}\,\frac{(q+n-3)!}{(q-1)!}\,\frac{1}{b}$$

et :

$$\frac{F^n(z)\,G_n(z)}{n!} = \frac{b^n\,g_n}{n!}\,\frac{\xi^{n\,q}}{\xi^{q+n-2}} + \ldots = \frac{b^n\,g_n}{n!}\,\xi^{(n-1)q-(n-2)} + \ldots$$

A partir de $n \geq 2$ l'exposant de ξ dans le premier terme de $\frac{F^n\,G_n}{n!}$ est supérieur ou égal à q, donc supérieur à 1.

Le seul terme de degré q figure dans $\frac{F^2\,G_2}{2!}$ et a pour coefficient $\frac{b}{2}$ d'où :

$$2.(4) \qquad \phi_N(z) = Z^* + (z - Z^*) + \frac{b}{2}(z - Z^*)^q + \ldots$$

On voit que le coefficient de $z - Z^*$ peut être obtenu dans 2.(3) en faisant $\alpha = 0$, c'est à dire $a = 1$.

DEUXIEME CAS :

L'itération initiale est d'ordre $q > 2$.

$$\phi(z) = Z^* + a(z - Z^*)^q + \ldots$$

$$F(z) = -\xi + a\,\xi^q + \ldots$$

$$G(z) = g\,\xi^{q-2} + \ldots \qquad \text{avec} \qquad g = -q\,a$$

$$G_3(z) = g_3\,\xi^{q-3} + \ldots \qquad \text{avec} \qquad g_3 = (q-2)g$$

Plus généralement :

$$G_n(z) = g_n\,\xi^{q-n} + \ldots \qquad \text{avec} \qquad g_n = (q-n+1)\,g_{n-1}$$

si $n \leq q$:

$$g_n = -\frac{q(q-2)!}{(q-n)!}\,a$$

si $n > q$:

$G_n(z)$ n'admet plus Z^* comme zéro et le développement de $\frac{F^n G_n}{n!}$ commencera par un terme en ξ^n de degré supérieur à q .

De là, en posant : $q = -\beta \neq 1$

$$2.(5) \qquad \begin{cases} \phi_N(z) = Z^* + a_N\,(z - Z^*)^q + \ldots \\ a_N = \dfrac{a}{\beta+1}\left\{1 + \dfrac{\beta}{1} + \dfrac{\beta(\beta+1)}{2!} + \ldots + \dfrac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+N-2)}{(N-1)!}\right\} \end{cases}$$

expression valable pour tout N car pour $N \geq q+1$ les termes correspondants de a_N sont nuls.

EXEMPLE :

Prenons pour itération initiale :

$$\phi(z) = z - q\,\frac{f(z)}{f'(z)} \qquad\qquad F = -q\,\frac{f(z)}{f'(z)}$$

Pour une racine simple de $f(z) = 0$, soit Z^* , l'itération ϕ est du premier ordre avec $a = 1-q$. Si q est un entier positif , $\phi_N(z)$ est du second ordre à partir de $N \geq q+1$.

Dans 2.(3) et 2.(5) on trouve l'expression :

$$1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{p!}$$

qui constitue les p premiers termes du développement de la fonction hypergéométrique :

$${}_2F_1\,(\alpha,1;1;x) = (1-x)^{-\alpha} \qquad \text{quand x tend vers 1 .}$$

On sait que ce développement converge absolument si et seulement si $\Re(\alpha) < 0$.

La formule classique :

$$ {}_2F_1\ (a,b;c;1) \;=\; \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)}\ {}_2F_1\ (a,b;c+1;1) $$

valable pour $\Re(a+b-c) < 0$, montre que :

$$ {}_2F_1\ (\alpha,1;1;1) \;=\; 0 \qquad \text{si} \qquad \Re(\alpha) < 0 $$

Donc :

a) si l'itération initiale est du premier ordre pour la racine Z^* *avec* $\phi'(Z^*) \neq 1$, *les itérations successives* $\phi_3, \phi_4, \ldots, \phi_N, \ldots$ *sont* <u>*en général*</u> *du premier ordre pour la même racine,*

et si $\Re\,\phi'(Z^*) < 1$, *elles "tendent" vers une itération du second ordre quand* N *tend vers l'infini, à moins que* $\phi'(Z^*) = -1, -2, \ldots, -q, \ldots$ *auquel cas* $\phi_N(z)$ *sera du second ordre au moins dès que :*

$$ N \geq 2 - \phi'(Z^*) \ ; $$

car dans l'expression de a_N de 2,(3), le second membre de la seconde égalité s'annule pour $\alpha = -1, -2, \ldots, -(N-1)$ et $\alpha = a-1 = \phi'(Z^*) - 1$.

Par exemple, si on prend comme itération initiale :

$$ \phi(z) \;=\; z - p\,\frac{f(z)}{f'(z)} \qquad\qquad (p \text{ entier} > 0) $$

Pour une racine multiple d'ordre p de $f(z) = 0$ c'est une itération du second ordre, mais relativement à une racine simple Z^* de $f(z) = 0$ cette itération n'est que du premier ordre et $\phi'(Z^*) = 1-p$ pour $N \geq 2 - (1-p) = p+1$, les itérations $\phi_N(z)$ seront toutes du second ordre au moins pour la racine Z^*.

Mais si $\Re\,\phi'(Z^*) > 1$, l'expression de a_N de 2.(3) vérifie :

$$ |a_N| \;>\; 1 $$

pour tout N, donc toutes les itérations successives $\phi_3(z), \phi_4(z), \ldots, \phi_N(z)$.. sont comme l'itération initiale $\phi(z)$ du type divergent pour la racine Z^*.

b) si l'itération initiale est d'ordre $q > 2$ *pour* Z^* *les itérations successives* ϕ_N *sont d'ordre* q *pour* $N \leq q$ *et deviennent d'ordre* q+1 *au moins pour* $N \geq q+1$, comme le prouvent les formules 2.(5), où $a_N = 0$ si :

$$ q \;=\; -\beta \;\leq\; N-1 \ . $$

2.7. - 2ème THEOREME FONDAMENTAL.

On obtient une condition suffisante de convergence absolue et uniforme de la série I(z) en se limitant aux domaines où G(z) est holomorphe, c'est à dire aux domaines qui renferment toutes les racines Z* de F(z) pour lesquelles l'itération initiale est du second ordre au moins.

Considérons donc un domaine (D) limité par une ou plusieurs courbes rectifiables ; (C) désigne la frontière de (D).

Je suppose que G(z) est holomorphe dans (D) ; on sait qu'alors G(z) atteint son maximum sur la frontière (C) de (D) ; je désigne par :

$$2\pi k(G,C) = \mathcal{L} \cdot \text{Max} |G(z)|$$

le produit de la longueur totale de C par le maximum de $|G(z)|$.

Je ne suppose rien sur l'ordre de connexion du domaine (D).

Soit un domaine Δ^* entièrement intérieur à (D) et soit $\delta(\Delta^*,C) = \delta$ la borne inférieure de la distance d'un point quelconque de Δ^* à un point quelconque de la frontière (C) du domaine (D). Cette borne inférieure est essentiellement non nulle. Dans la pratique, on prend pour (D) et (Δ^*) les domaines intérieurs à deux cercles concentriques de rayons R et r (ou extérieurs, le cas échéant) ; δ représentera dans ce cas la différence des rayons.

La démonstration du deuxième théorème fondamental repose sur les trois lemmes suivants, dont le premier est la traduction immédiate d'un théorème de Cauchy, relatif au développement d'une fonction holomorphe.

LEMME 1 :

Lorsque : $z \in \Delta^*$

2.(6) $$|G^{(p)}(z)| = \left| \frac{d^p}{dz^p} G(z) \right| \leq p!\, k \frac{1}{\delta^{p+1}}$$

Cette inégalité résulte de :

$$G^{(p)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{G(u)}{(u-z)^{p+1}} du$$

et de ce que lorsque : $z \in \Delta^*$

$$|u-z|^{-1} < \frac{1}{\delta}$$

LEMME 2 :

N et q désignant des entiers positifs, on a :

$$2.(7) \qquad \sigma_q^N = \sum_{r=1}^{N} r(r+1)(r+2)\ldots(r+q-1) = \frac{1}{q+1} N(N+1)(N+2)\ldots(N+q)$$

DEMONSTRATION :

L'égalité est manifeste pour N = 1 quel que soit q .

Pour N = 2 , elle s'écrit :

$$[1.2\ldots q] + [2.3\ldots(q+1)] = \frac{1}{q+1} 2.3\ldots(q+2) = q!\,(q+2)$$

donc elle est vérifiée quel que soit q .

Supposons donc l'égalité 2.(7) vraie jusqu'à N ≤ n pour tout q .

Pour N = n+1 on aura :

$$\sigma_q^{n+1} = \sigma_q^n + (n+1)(n+2)\ldots(n+q)$$

$$= \frac{1}{q+1} n(n+1)\ldots(n+q) + (n+1)(n+2)\ldots(n+q)$$

$$= \frac{1}{q+1} (n+1)(n+2)\ldots(n+q)[n+q+1]$$

ce qui prouve le lemme.

LEMME 3 :

Lorsque : $z \in \Delta^*$

$$2.(8) \qquad |G_n^{(p)}| < \frac{(p+n-2)}{(n-2)!} k_n \frac{1}{\delta^{p+n-1}}$$

où :

$$k_n = \frac{(-)^{n-1}}{\alpha^n} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1) \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{1+k}$$

DEMONSTRATION :

Dérivant $G_3 = 2\,G\,G + G'$ p fois par la formule de Leibniz, on a

$$G_3^{(p)} = 2 \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} G^{(p-q)} G^{(q)} + G^{(p+1)}$$

Le lemme 1 donne si $z \in \Delta^*$:

$$|G_3^{(p)}(z)| < \left[2\,k^2 \sum_{q=o}^{p} \binom{p}{q} (p-q)!\; q! + k(p+1)! \right] \frac{1}{\delta^{p+2}} < k_3 \frac{(p+1)!}{\delta^{p+2}}$$

avec $k_3 = 2\,k^2 + k = k(2k+1)$

Puis de :

$$G_4^{(p)}(z) = 3 \sum_{q=o}^{p} \binom{p}{q} G^{(p-q)}\, G_3^{(q)} + G_3^{(p+1)}$$

on déduit :

$$|G_4^{(p)}(z)| < \left[3k\,k_3 \sum_{q=o}^{p} \binom{p}{q} (p-q)!\; (q+1)! + k_3(p+2)! \right] \frac{1}{\delta^{p+3}}$$

Le crochet vaut : $3k\,k_3 \frac{(p+2)!}{2} + k_3(p+2)! = k_4 \frac{(p+2)!}{2}$

avec $k_4 = k_3(3k+2)$

D'où :

$$|G_4^{(p)}(z)| < k_4 \frac{(p+2)!}{2!} \frac{1}{\delta^{p+3}}$$

De là, j'infère la loi générale définie par 2.(8) que je démontre par récurrence. La loi étant supposée vraie quel que soit p et pour $n \leq N$, pour $n = N+1$ on a :

$$G_{N+1}^{(p)}(z) = N \sum_{q=o}^{p} \binom{p}{q} G^{(p-q)}\, G_N^{(q)} + G_N^{(p+1)}$$

d'où pour $z \in \Delta^*$:

$$|G_{N+1}^{(p)}(z)| < \left[Nk_N\,k \sum_{q=o}^{p} \binom{p}{q} (p-q)! \frac{(q+N-2)!}{(N-2)!} + k_N \frac{(p+N-1)!}{(N-2)!} \right] \frac{1}{\delta^{p+N}}$$

Le coefficient de $Nk_N\,k$ dans le crochet vaut :

$$\frac{p!}{(N-2)!} \sum_{q=o}^{p} \frac{(q+N-2)!}{q!} = \frac{p!}{(N-2)!}\, \sigma_{N-2}^{p+1} = \frac{(p+N-1)!}{(N-1)!}$$

d'après le lemme 2 .

D'où :

$$|G^{(p)}_{N+1}(z)| < \frac{(p+N-1)!}{(N-1)!}\, k_N (Nk+N-1)\, \frac{1}{\delta^{p+N}} = \frac{(p+N-1)!}{(N-1)!}\, k_{N+1}\, \frac{1}{\delta^{p+N}}$$

La suite k , k_3 ,..., k_n ,... étant définie par :

$$k_3 = k\,(2k+1)$$

$$k_4 = k_3\,(3k+2)$$

.....

$$k_n = k_{n-1}\,[(n-1)\,k + n-2]$$

d'où :

$$k_n = k(2k+1)(3k+2) \ldots [(n-1)\,k + n-2]$$

On peut écrire en posant :

$$\alpha = -\frac{1}{1+k} \qquad \text{ou} \qquad k = -\frac{\alpha+1}{\alpha}$$

$$k_n = -\frac{\alpha+1}{\alpha}\left[\frac{-\alpha-2}{\alpha}\right]\left[\frac{-\alpha-3}{\alpha}\right] \ldots \left[\frac{-\alpha-n+1}{\alpha}\right]$$

$$= \frac{(-)^{n-1}}{\alpha^n}\,\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \ldots (\alpha+n-1)$$

2ème THEOREME FONDAMENTAL :

La série itérative converge absolument et uniformément dans le domaine Δ^* si dans ce domaine l'inégalité :

$$\operatorname*{Max}_{z \in \Delta^*} |F(z)| \leq \frac{\delta}{1+k} = -\alpha\,\delta$$

est satisfaite.

DEMONSTRATION :

Lorsque $z \in \Delta^*$ on a, d'après le lemme 3 :

$$|G_n(z)| < \frac{k_n}{\delta^{n-1}}$$

Le module du terme général de la série itérative est donc majoré dans Δ^* par :

$$\frac{k_n\,\delta}{n!}\quad\frac{1}{\delta^n}\quad \text{Max}\ |F^n(z)| \;\leq\; \left|\frac{\alpha(\alpha+1)\ \ldots\ (\alpha+n-1)}{n!}\right|\ \delta$$

on sait que :

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ \ldots\ (\alpha+n-1)}{n!} \;=\; \frac{0(1)}{n^{1-\alpha}}$$

Comme $1-\alpha = 1 + \frac{1}{1+k} > 1$, la série converge absolument et uniformément dans Δ^* d'après un théorème classique de Weierstrass.

2.8. - *LOCALISATION DES RACINES DE* F(z).

THEOREME III :

Toute racine Z^* *de* $F(z)$ *pour laquelle l'itération initiale* :

$$\phi(z) \;=\; z + F(z)$$

est du second ordre au moins, est intérieure au domaine Δ *de convergence absolue et uniforme de la série itérative* $I(z)$ *formée à partir de l'itération initiale* $\phi(z)$.

DEMONSTRATION :

On a vu, au début de la partie de ce chapitre, que $G(z)$ est holomorphe en Z^*. Si donc, on prend pour (D) l'intérieur d'un cercle de centre Z^* et de rayon R suffisamment petit, $G(z)$ est holomorphe dans (D), et si l'on prend pour Δ' l'intérieur d'un cercle concentrique de rayon $r \leq \frac{R}{2}$, on peut appliquer le deuxième théorème fondamental en cherchant r tel que :

$$\underset{z\,\in\,\Delta'}{\text{Max}}\ |F(z)| \;\leq\; \frac{R-r}{1+k}$$

Comme k est fini positif et bien déterminé quand R est fixé, et que :

$$\frac{R-r}{1+k} \;>\; \frac{R}{2(1+k)} \;=\; \text{nombre} > 0 \quad \text{indépendant de r,}$$

il suffit d'assurer l'inégalité :

$$\underset{z\,\in\,\Delta'}{\text{Max}}\ |F(z)| \;<\; \frac{R}{2(1+k)}$$

ce qui est possible pour R suffisamment petit, puisque $F(Z^*) = 0$.

THEOREME IV :

Toute racine Z^* *de* $F(z) = 0$, *pour laquelle l'itération initiale* $\phi(z) = z + F(z)$ *est du premier ordre, avec* $\Re\, \phi'(Z^*) \geq 1$, *est extérieure au domaine* Δ *de convergence absolue et uniforme de la série itérative formée à partir de l'itération initiale* $\phi(z)$.

DEMONSTRATION :

Reprenant les notations du § 2.6., on peut écrire :

$$\frac{F^n(z)\, G_n(z)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n-1)}{n!} (z - Z^*) + \ldots$$

où $\alpha = \phi'(Z^*) - 1$, les termes non écrits étant des termes en $(z-Z^*)^2$, $(z-Z^*)^3$. .

L'hypothèse $\Re\, \phi'(Z^*) \geq 1$ entraîne $\Re\, \alpha = 0$ et on sait qu'alors $\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}$ est le terme général d'une série divergente. Cette propriété suffit pour affirmer que la série de terme général $\frac{F_n\, G_n}{n!}$ diverge au voisinage de Z^*, sauf au point $z=Z^*$ pour lequel $I(Z^*) = Z^*$ puisque tous les autres termes sont nuls. En effet, si on suppose que $I(z)$, donc :

$$I(z) - Z^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^n\, G_n}{n!}$$

converge absolument et uniformément dans un domaine contenant Z^*, cette fonction est continue par rapport à la variable $z-Z^*$. Comme ce point Z^* est un zéro de $I(z) - Z^*$, la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^n\, G_n}{n!\ (z-Z^*)}$$

converge aussi absolument et uniformément dans le voisinage de Z^*, et converge en particulier au point Z^* ce qui est absurde car en ce point la série se réduit à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n-1)}{n!}$$ qui diverge.

EXEMPLE :

Les fonctions F , pour lesquelles $G = \frac{g}{z}$ (g = constante) sont de la forme :

$$F = \frac{1}{g-1} z + K z^{g} \qquad (K = \text{constante arbitraire})$$

ou :

$$F = \alpha z + K z^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \qquad \left(g = \frac{1+\alpha}{\alpha}\right)$$

Si l'on veut que F soit holomorphe et uniforme autour de l'origine il faut prendre :

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} = m + 1 \qquad (m \text{ entier} \geq 0)$$

Pour une telle valeur de α :

$$F = \frac{z}{m A} \left(A - z^{m}\right) \qquad \left(A = -\frac{1}{m K}\right)$$

on a vu que le point $z = 0$ n'est pas intérieur au domaine Δ de convergence absolue et uniforme de la série itérative $I(z)$.

L'itération initiale est du premier ordre pour la racine $z = 0$ de $F(z)$ avec $\phi'(0) = \alpha + 1 = \frac{1}{m} + 1 > 1$.

THEOREME V :

Si $F(z)$ *admet le point à l'infini comme point ordinaire, le domaine* Δ, *de convergence absolue et uniforme de la série itérative* $I(z)$ *formée à partir de l'itération initiale* $\phi(z) = z + F(z)$, *contient le voisinage du point à l'infini (c'est à dire* $I(z) - z$ *converge à l'infini).*

DEMONSTRATION :

Soit $l \geq 0$ la limite de $|F(z)|$ pour $|z|$ tendant vers l'infini ; $F(z)$ donc $F'(z)$ étant supposées analytiques autour du point à l'infini , on peut trouver un cercle (γ) de centre 0, de rayon r (on peut toujours supposer $r > 2l$) tel que $F(z)$ et $F'(z)$ soient holomorphes à l'intérieur de ce cercle.

Soit :

$$k = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \operatorname*{Max}_{|z|=r} |G(z)|$$

le nombre k est parfaitement déterminé.

Soit $R > (1+k)r + r$; considérons le domaine extérieur au cercle de centre 0 et de rayon R . La distance d'un point quelconque de ce domaine

à un point du cercle (γ) est au moins égale à :

$$R - r > (1+k)r$$

Comme $\lim_{|z|=\infty} |F(z)| = 1$ on peut trouver un R' positif tel que

$$|z| \geq R' \text{ entraîne } |F(z)| < 2l .$$

Soit C le cercle de centre 0 et de rayon le plus grand des deux nombres R et R'. Dans le domaine extérieur à C, on a les inégalités :

$$|F(z)| < 2l < r < \frac{R-r}{1+k}$$

D'après le second théorème fondamental, l'extérieur du cercle C appartient au domaine de convergence absolue et uniforme de la série itérative $I(z)$.

REMARQUE :

Ce théorème donne une condition suffisante, mais non nécessaire, comme on le vérifie facilement sur la série itérative construite à partir de l'itération de Newton-Raphson pour $z^n - A = 0$.

COMMENTAIRES :

Soit une équation algébrique $f(z) = 0$.

L'itération de Newton-Raphson $\phi(z) = z - q\frac{f}{f'}$, où q est un entier supérieur à 1, est du premier ordre et du type divergent pour toute racine simple ; elle est aussi du type divergent pour toute racine multiple d'ordre inférieur à $\frac{q}{2}$.

Si $q < 0$ l'itération diverge pour toute racine de $f(z) = 0$. On ne change pas le caractère de cette itération en remplaçant $\phi(z)$ par :

$$\phi^*(z) = z - q\frac{f}{f' + \lambda f} \qquad (\lambda \text{ constante} > 0)$$

Or, pour cette dernière itération $F = -q\frac{f}{f' + \lambda f}$ $(q < 0)$ admet le point à l'infini comme point d'holomorphie ; par suite, la série itérative construite à partir de cette fonction admet un domaine Δ de convergence absolue et uniforme, bien que l'itération initiale soit du type divergent pour toute racine.

Mais, d'après le théorème IV, ce domaine Δ ne contient aucune des racines de l'équation $F = 0$ donc de $f = 0$.

THEOREME VI :

A l'intérieur d'un domaine Δ^* *de convergence absolue et uniforme de la série itérative* $I(z)$, *ne contenant qu'une seule racine* Z^* *de* $F(z) = 0$, *on peut trouver un indice* n, *tel que la suite* $\{z_p\}$ *définie par :*

$$z \in \Delta^* \quad , \quad z_1 = \phi_N(z) \quad , \quad z_2 = \phi_{N+1}(z_1) \quad , \ldots , \quad z_p = \phi_{N+p-1}(z_{p-1}) \quad , \ldots$$

converge uniformément vers Z^* *dès que* $N \geq n$.

DEMONSTRATION :

Puisque $\phi_N(z)$ tend vers Z^* uniformément, quand N augmente indéfiniment, on peut déterminer $n = n(\varepsilon)$ tel que :

$$|Z^* - \phi_N(z)| < \varepsilon$$

dès que N est fixé au moins égal à $n(\varepsilon)$ pour tout $z \in \Delta^*$.

Donc :

$$|Z^* - \phi_{N+p-1}(z)| < \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad p > 0 \quad \text{et tout} \quad z \in \Delta^*.$$

L'inégalité :

$$|Z^* - \phi_N(z)| = |Z^* - z_1| < \varepsilon$$

montre que, ε étant suffisamment petit, $z_1 \in \Delta^*$ donc :

$$|Z^* - \phi_{N+1}(z_1)| = |Z^* - z_2| < \varepsilon$$

par suite $z_2 \in \Delta^*$ et ainsi de suite.

Comme $Z^* - \phi_{N+p-1}(z)$ tend vers zéro uniformément quand p augmente indéfiniment pour tout $z \in \Delta^*$, en particulier :

$$Z^* - \phi_{N+p-1}(z_{p-1}) = Z^* - z_p \quad \text{tend vers zéro}$$

ce qui démontre le théorème.

Dans la pratique, si z est choisi suffisamment voisin de Z^* , la suite construite à partir de $N = 2$ soit :

$$z_1 = \phi_2(z) \qquad z_2 = \phi_3(z_1) \quad \ldots \quad z_p = \phi_{p+1}(z_{p-1}) \quad \ldots$$

converge vers Z^* à condition que l'itération initiale $\phi_2(z)$ soit convergente.

Dans le cas où $\phi_2(z)$ est une itération du premier ordre ou d'ordre $q \neq 2$, on a vu que les itérations successives $\phi_3 , \ldots \phi_N , \ldots$ sont en général du premier ordre ou d'ordre q, la détermination de la racine Z^* par la

suite $\{z_p\}$ précédente, ne présente pas d'intérêt. Mais si l'itération initiale $\phi_2(z)$ est du second ordre, l'itération ϕ_N sera au moins d'ordre N et le processus indiqué constitue une excellente accélération de la convergence. C'est l'idée employée par Rutishauser à partir des itérations successives d'ordre m de König.

CHAPITRE III

SYSTEMES D'EQUATIONS

3.1. - *GENERALITES. - Cas de deux équations.*

Afin de simplifier l'exposé, j'examinerai d'abord un système de deux équations à deux inconnues. Les méthodes et les résultats se généralisent à un nombre quelconque d'équations, comme je le montrerai par la suite.

Dans le cas d'une seule équation, on connait de nombreuses méthodes de séparation des racines, qui permettent de calculer par l'itération une racine déterminée dès qu'on l'a localisée. Dans le cas d'un système, il ne semble pas possible, sauf exception, de séparer les racines en toute généralité, bien que, dans les problèmes pratiques, on possède, en général, quelques renseignements sur l'emplacement des racines que l'on cherche. Je laisserai donc entièrement de côté dans ce chapitre les questions de séparation des racines.

Je suppose, dans chaque cas, qu'on connait une valeur approchée plus ou moins bonne des racines à calculer, et je me propose, à partir de ces valeurs approchées, de construire des procédés d'itération permettant de calculer ces racines.

Soient deux suites :

$$x_0 , x_1 , .., x_N , ... = \{x_N\}$$

$$y_0 , y_1 , ... y_N , ... = \{y_N\}$$

qui tendent respectivement vers les racines a et b des équations :

$$3.(1) \qquad \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Comme dans le cas d'une seule équation, je n'examinerai que des itérations du type :

$$x_{N+1} = \phi(x_N, y_N)$$

$$y_{N+1} = \phi(x_N, y_N)$$

autrement dit, chaque couple (x_{N+1}, y_{N+1}) ne dépend explicitement que du seul couple précédent.

Je suppose, dans tout ce qui suit, que les fonctions $\phi(x,y)$, $\psi(x,y)$ des deux variables indépendantes x et y sont continues et admettent des dérivées continues jusqu'à l'ordre voulu dans les domaines étudiés. Ces hypothèses, jointes au fait que les deux suites $\{x_N\}$ et $\{y_N\}$ tendent respectivement vers a et b, montrent que ces nombres satisfont aux équations :

$$a = \phi(a,b)$$

$$b = \psi(a,b)$$

Si on pose :

$$\phi(x,y) = x + F(x,y)$$

$$\psi(x,y) = y + G(x,y)$$

les deux fonctions F(x,y), G(x,y) s'annulent donc pour x = a , y = b . Ceci prouve qu'on peut chercher, pour calculer les racines de 3.(1), des itérations de la forme :

$$\phi(x,y) = x + u_1(x,y)\, f(x,y) + v_1(x,y)\, g(x,y)$$

$$\psi(x,y) = y + u_2(x,y)\, f(x,y) + v_2(x,y)\, g(x,y)$$

où u_1, v_1, u_2, v_2 sont des fonctions finies au point (a,b).

3.2. - CONVERGENCE ET ORDRE DES ITERATIONS.

On peut écrire, en utilisant le développement de Taylor :

$$\phi(x_N,y_N) - \phi(a,b) = \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{q!}\left[(x_N-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y_N-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(q)} \phi(a,b)$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!}\left[(x_N-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y_N-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(p+1)} \phi\left[a+\theta_1(x_N-a),\ b+\theta_1(y_N-b)\right]$$

$$\psi(x_N,y_N) - \psi(a,b) = \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{q!}\left[(x_N-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y_N-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(q)} \psi(a,b)$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!}\left[(x_N-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y_N-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(p+1)} \psi\left[a+\theta_2(x_N-a),\ b+\theta_2(y_N-b)\right]$$

avec $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$.

PREMIER CAS :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\phi(a,b) + \frac{\partial}{\partial y}\phi(a,b)\right| \neq 0$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\psi(a,b) + \frac{\partial}{\partial y}\psi(a,b)\right| \neq 0$$

Soit A la plus grande de ces deux quantités. Par définition, l'itération est dite du premier ordre . Je rappelle que , si $A < 1$ l'itération converge, si $A \geq 1$ l'itération diverge.

Soit :

$$\varepsilon_N = \text{Max}\left(|x_N-a|\ ,\ |y_N-b|\right)$$

on a :

$$x_{N+1}-a = (x_N-a)\frac{\partial}{\partial x}\phi[a+\theta_1(x_N-a),\ b+\theta_1(y_N-b)]$$

$$+ (y_N-b)\frac{\partial}{\partial y}\phi[a+\theta_1(x_N-a),\ b+\theta_1(y_N-b)]$$

$$y_{N+1}-b = (x_N-a)\frac{\partial}{\partial x}\psi[a+\theta_2(x_N-a),\ b+\theta_2(y_N-b)]$$

$$+ (y_N-b)\frac{\partial}{\partial y}\psi[a+\theta_2(x_N-a),\ b+\theta_2(y_N-b)]$$

Si x_N-a et y_N-b sont suffisamment petits :

$$|\phi'_x\ [a + \theta_1(x_N-a)\ ,\ b + \theta_1(y_N-b)]| + |\phi'_y\ [\quad]| < A + \eta_1$$

$$|\psi'_x\ [a + \theta_2(x_N-a)\ ,\ b + \theta_2(y_N-b)]| + |\psi'_y\ [\quad]| < A + \eta_2$$

et on peut écrire :

$$\varepsilon_{N+1} \leq A^* \varepsilon_N$$

A^* étant supposé supérieur ou au moins égal à la plus grande des deux quantités $A + \eta_1$, $A + \eta_2$.

Ceci posé, si A est inférieur à 1, on peut prendre ε_N suffisamment petit pour que $A < A^* < 1$. Il suit de là que :

$$\varepsilon_{N+m} \leq A^{*m} \varepsilon_N$$

cette égalité prouve que ε_{N+m} tend vers zéro quand m augmente indéfiniment. En d'autres termes, les deux suites $\{x_N\}$ et $\{y_N\}$ tendent respectivement vers a et b .

DEUXIEME CAS :

Les dérivées partielles de $\phi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ sont supposées toutes nulles pour $x = a$, $y = b$ jusqu'à l'ordre p-1 inclus. Une au moins des dérivées partielles d'ordre p n'est pas nulle pour $x = a$, $y = b$. L'itération est dite d'ordre p .

Soit :

$$M = \text{Max}\left[\left|\frac{\partial^p \phi(a,b)}{\partial x^\alpha\ \partial y^\beta}\right| ,\ \left|\frac{\partial^p \psi(a,b)}{\partial x^\alpha\ \partial y^\beta}\right|\right] \qquad \alpha + \beta = p$$

$$\varepsilon_N = \text{Max}\ (|x_N-a| ,\ |y_N-b|)$$

de :

$$\phi(x_N,y_N) - \phi(a,b) = \frac{1}{p!}\left[(x_N-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y_N-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(p)} \phi\left[a + \theta_1(x_N-a)\ ,\ b + \theta_1(y_N-b)\right]$$

$$\psi(x_N,y_N) - \psi(a,b) = \frac{1}{p!}\left[(x_N-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y_N-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(p)} \psi\left[a + \theta_2(x_N-a)\ ,\ b + \theta_2(y_N-b)\right]$$

on déduit :

$$\varepsilon_{N+1} \leq \frac{p+1}{p!} M(1+\eta)\, \varepsilon_N^p$$

$$\frac{\varepsilon_{N+1}}{\varepsilon_N} \leq \frac{p+1}{p!} M(1+\eta)\, \varepsilon_N^{p-1}$$

quel que soit M il est possible de trouver ε_N tel que :

$$\frac{\varepsilon_{N+1}}{\varepsilon_N} < 1$$

en d'autres termes, il est toujours possible de trouver un point (x_N, y_N) suffisamment proche de (a,b) pour que la suite $\{\varepsilon_N\}$ tende vers zéro.

3.3. - ***GENERALISATION - Cas de n équations.***

Soit un système de n équations à n inconnues :

3.(2) $$f_i(x^1, x^2, \ldots, x^n) = f_i(M) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

M désigne le vecteur de composantes $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ dans l'espace vectoriel à n dimensions.

On se propose de construire une suite :

$$M_0, M_1, \ldots, M_N, \ldots$$

qui converge vers $\mathfrak{M}$ solution du système 3.(2).

Je me borne à construire une suite telle que chaque terme ne dépende explicitement que du seul terme précédent :

$$M_{N+1} = \phi(M_N)$$

Je suppose que la fonction ϕ est continue et admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre voulu. Comme $\phi(M)$ s'exprime à l'aide d'une matrice dont les éléments sont des fonctions des variables scalaires $x^1, x^2, \ldots, x^n$, les dérivées partielles de $\phi(M)$ s'entendent par rapport aux variables scalaires $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Si donc la suite $\{M_N\}$ tend vers $\mathfrak{M}$, la continuité de la fonction $\phi(M)$ exige :

$$\mathfrak{M} = \phi(\mathfrak{M})$$

Si on pose :

$$\phi(M) \equiv M + F(M)$$

la fonction F(M) satisfait à $F(\mathfrak{M}) = 0$. En d'autres termes F(M) = 0 admet la même racine $\mathfrak{M}$ que l'équation :

$$f(M) = \left[f_1(M),\ f_2(M)\ ,\ldots,\ f_n(M)\right]' = 0$$

la notation A' désigne ici, comme dans la suite de ce chapitre, la transposée de A .

On pourra donc, en général, chercher , étant donné f(M) = 0 , une itération de la forme :

$$\phi(M) = M + F(M)$$

avec :

$$F(M) = \Lambda(M)\ f(M)$$

où $\Lambda(M)$ représente une (n-n)-matrice qui reste finie pour $M = \mathfrak{M}$.

3.4. - DIGRESSION SUR LA FORMULE DE TAYLOR VECTORIELLE - OPERATEUR D.

Soit une matrice colonne $\phi(M)$ dont les éléments sont des fonctions de n variables, continues, à dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p+1 inclus.

Posons :

$$D = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x^2}\ ,\ldots,\ \frac{\partial}{\partial x^n}\right]$$

et convenons que *l'opérateur* D *agit sur une fonction placée à sa gauche.*

$$\phi\ D = \left[\phi_1,\ \phi_2\ ,\ldots,\ \phi_n\right]' \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x^2}\ ,\ldots,\ \frac{\partial}{\partial x^n}\right]$$

$$\phi\ D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x^1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x^2} & \ldots\ldots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x^1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x^2} & \ldots\ldots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x^n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x^1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x^2} & \ldots\ldots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

Si H est une colonne constante : $H = (h^1, h^2, \ldots, h^n)'$

$$\phi\, DH = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x^n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ h^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i h^i \frac{\partial \phi_1}{\partial x^i} \\ \cdots \\ \sum_i h^i \frac{\partial \phi_n}{\partial x^i} \end{pmatrix}$$

et une espression de la forme $\phi\, DH\, DH$ représente :

$$\begin{pmatrix} \sum_i h^i \frac{\partial \phi_1}{\partial x^i} \\ \cdots \\ \sum_i h^i \frac{\partial \phi_n}{\partial x^i} \end{pmatrix} \sum_i h^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \sum_i h^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_i h^i \frac{\partial \phi_1}{\partial x^i} \right) \\ \cdots \\ \sum_i h^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_i h^i \frac{\partial \phi_n}{\partial x^i} \right) \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture, introduisons comme dans la formule de Taylor, le produit symbolique :

$$DH\, DH = (DH)^{(2)}$$

dont la signification est la suivante : on développe $DH\, DH$ comme un produit matriciel ordinaire, et on y remplace :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{par} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^j}$$

l'opérateur $DH\, DH = (DH)^{(2)}$ joue donc le même rôle que l'opérateur :

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(2)}$$

dans le développement de Taylor à cela près, qu'il agit sur des éléments placés à sa gauche.

On généralise sans peine à l'opérateur :

$$\underbrace{DH\, DH \ldots DH}_{p \text{ fois}} = (DH)^{(p)}$$

Ces notations étant posées, une fonction $\phi(M)$, où ϕ est un vecteur colonne dont les éléments sont fonctions de n variables indépendantes $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ composantes de M, admet le développement suivant :

$$\phi(M + H) = \phi(M) + \phi(M)\ DH + \frac{1}{2!}\phi(M)\ (DH)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2!}\phi(M)\ (DH)^{(p)} + \frac{1}{(p+1)!}\phi(M_1)\ (DH)^{(p+1)}$$

M_1 désignant le vecteur $M + \Theta H$, avec $\Theta = \text{diag}(\theta^1, \theta^2, \ldots\ldots, \theta^n)$ où $0 < \theta^i < 1$. En effet, si on explicite la i-ième ligne de $\phi(M + H)$ on retrouve la formule de Taylor habituelle d'une fonction de plusieurs variables.

3.5. – *PROPRIETES DE L'OPERATEUR D.*

1°) Considérons une "forme" homogène de degré p, c'est à dire :

$$\mathfrak{L} = M\ A_1\ M\ A_2\ M \ldots A_{p-1}\ M$$

où : $M = (x^1, x^2, \ldots, x^n)'$

$A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ sont des *vecteurs lignes constants*.

$\mathfrak{L}$ est donc un vecteur colonne dont les éléments sont des polynômes homogènes de degré p par rapport à $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Si on applique l'opérateur D à cette forme :

$$(M\ A_1\ M\ A_2\ M \ldots A_{p-1}\ M)\ D = \mathfrak{L}\ D$$

on obtient une somme de p termes qui sont des (n-n)-matrices déduites de $\mathfrak{L}$, en remplaçant successivement chaque M par I. Cette propriété résulte immédiatement de la règle de dérivation d'un produit et de la multiplication matricielle.

Cette somme s'écrit :

$$\mathfrak{L}\ D = I(A_1\ M\ A_2\ M \ldots A_{p-1}\ M) + M\ A_1\ (A_2\ M \ldots A_{p-1}\ M) + \ldots$$

$$\ldots + M\ A_1\ M\ A_2\ M \ldots A_{p-1}$$

les produits entre parenthèses sont des scalaires.

Si on multiplie $\mathfrak{L}\ D$ à droite par M, on obtient la matrice colonne :

$$\mathfrak{L}\ D\ M = I(A_1\ M\ A_2\ M \ldots A_{p-1}\ M)\ M + M\ A_1(A_2\ M \ldots A_{p-1}\ M)\ M + \ldots$$

$$\ldots + M\ A_1\ M\ A_2\ M \ldots A_{p-1}\ M$$

Dans chaque terme du second membre, le dernier M placé à droite de la parenthèse qui est un scalaire, peut être déplacé pour être mis à gauche (sauf dans le dernier terme) :

$$\mathfrak{L}\, D\, M = M\,(A_1\, M\, A_2\, M \ldots A_{p-1}\, M) + M\, A_1\, M\,(A_2\, M \ldots A_{p-1}\, M)$$
$$+ M\, A_1\, M\, A_2\, M \ldots A_{p-1}\, M)$$

On s'aperçoit alors que tous ces termes sont égaux à $\mathfrak{L}$ donc :

3.(3) $$\mathfrak{L}\, D\, M = p\, \mathfrak{L}$$

égalité qui est à rapprocher de :

$$\frac{d}{dx}\, x^p = p\, x^p$$

Cette propriété me servira plus loin pour généraliser le procédé (P) au cas d'un système de n équations à n inconnues.

2°) Soient A(M) une (n-n)-matrice et V(M) un vecteur colonne, Appliquons l'opérateur D au produit AV . Il vient :

3.(4) $$A\, V\, D = \underline{A}\, V\, D + A\, \underline{V}\, D$$

(où les éléments soulignés doivent être considérés comme constants dans les dérivations). En effet, l'élément général de $A\, V\, D$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\,(a^i_k\, v^k) = a^i_k\, \frac{\partial}{\partial x^j}\, V^k + \frac{\partial\, a^i_k}{\partial\, x^j}\, V^k$$

D'autre part si :

$$V = (v^1, v^2, \ldots, v^n)'$$

posons :

$$\mathcal{O} = \mathrm{diag}\,(v^1, v^2, \ldots, v^n)$$

puis :

$$\mathcal{O}\, V = V^2 = \left[(v^1)^2, (v^2)^2, \ldots, (v^n)^2\right]'$$

et plus généralement :

$$\mathcal{O}^{p-1}\, V = V^p = \left[(v^1)^p, (v^2)^p, \ldots, (v^n)^p\right]'$$

quel que soit p positif ou nul.

Je vais montrer que :

3.(5) $$V^p\, D = p\, \underline{\mathcal{O}}^{p-1}\, V\, D$$

En effet, en explicitant, on a :

$$\left[(v^1)^p, \ldots, (v^n)^p\right]\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}(v^1)^p & \ldots & \frac{\partial}{\partial x^n}(v^1)^p \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial}{\partial x^1}(v^n)^p & \ldots & \frac{\partial}{\partial x^n}(v^n)^p \end{vmatrix}$$

$$= p\ \mathrm{diag}\left[(v^1)^{p-1}, (v^2)^{p-1}, \ldots, (v^n)^{p-1}\right] \begin{vmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial v^1}{\partial x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial v^n}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial v^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

Ce qui démontre la proposition.

3.6. - *CONVERGENCE ET ORDRE DES ITERATIONS*.

Revenant aux notations employées plus haut, je peux écrire en posant :

$$H_N = M_N - \mathfrak{M}$$

$$M_{N+1} - \mathfrak{M} = \phi(M_N) - \phi(\mathfrak{M}) = \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{q!}\phi(\mathfrak{M})\,(D\,H_N)^{(q)} + \frac{1}{(p+1)!}\phi(\mathfrak{M} + \Theta\,H_N)\,(D\,H_N)^{(p+1)}$$

PREMIER CAS : *$\phi(\mathfrak{M})D$ n'est pas nul*.

Ce qui signifie que les dérivées partielles du premier ordre ne sont pas toutes nulles pour $M = \mathfrak{M}$. l'itération est dite du premier ordre et on a :

$$M_{N+1} = \phi(\mathfrak{M} + \Theta\,H_N)\,D\,H_N$$

Si donc la somme des modules des éléments de chaque ligne de la matrice $\phi(\mathfrak{M})D$ est moindre que 1 , on peut choisir H_N suffisamment petit pour que la somme des modules des éléments de chaque ligne de la matrice :

$$\phi(\mathfrak{M} + \Theta\,H_N)D$$

soit inférieure à un nombre $K < 1$. Il suit de là que si l'on désigne par ε_N le module de l'élément le plus grand en valeur absolue de H_N, on a :

$$\varepsilon_{N+1} \leq K \varepsilon_N$$

Par conséquent, la matrice colonne H_{N+m} tend vers zéro quand N restant fixe, m augmente indéfiniment, ce qui signifie que M_{N+m} tend vers $\mathfrak{M}$.

DEUXIEME CAS :

Toutes les dérivées partielles de $\phi(M)$ *sont nulles jusqu'à l'ordre* p-1 *inclus pour* $M = \mathfrak{M}$. *Il existe au moins une dérivée partielle d'ordre* p *non nulle pour* $M = \mathfrak{M}$. L'itération est dite d'ordre p.

On a :

$$M_{N+1} - \mathfrak{M} = \phi(M_N) - \phi(\mathfrak{M}) = \frac{1}{p!} \phi(\mathfrak{M} + \Theta H_N) (D H_N)^{(p)}$$

Les dérivées partielles d'ordre p étant supposées continues, la matrice $\phi(\mathfrak{M} + \Theta H_N) D^{(p)}$ a ses éléments continus. On a (avec les mêmes notations que ci-dessus) :

$$\varepsilon_{N+1} \leq A \varepsilon_N^p \qquad (A \text{ étant une certaine constante})$$

Il suit immédiatement de là que la suite $\{M_N\}$ converge vers $\mathfrak{M}$, si ε_0 est suffisamment petit.

REMARQUE :

L'ordre p d'une itération $\phi(M)$ ne peut pas diminuer si on ajoute à $\phi(M)$ une colonne de la forme K(M) dont les éléments sont des infiniment petits d'ordre p par rapport à $(M - \mathfrak{M})$.

3.7. – *CONSTRUCTION DES ITERATIONS DU SECOND ORDRE.*

L'itération :

$$\phi(M) = M + \Lambda(M) f(M)$$

sera du second ordre si :

$$\phi(\mathfrak{M}) D = 0$$

on a :

$$\phi(M) D = M D + \Lambda(M) D f(M) + \underline{\Lambda(M)} f(M) D$$

$$M\,D = \left[x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n\right]\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x^n}\right] = I$$

$$\phi(M)D = I + \Lambda(M)D\ f(M) + \underline{\Lambda(M)}\ f(M)D$$

pour $M = \mathfrak{M}$:

$$D = I + \underline{\Lambda(\mathfrak{M})}\ f(\mathfrak{M})D \quad \text{où} \quad f(\mathfrak{M})D = \left[f(M)D\right]_{M = \mathfrak{M}}$$

En supposant le déterminant $\Delta\left[f(\mathfrak{M})D\right] \neq 0$ on trouve :

$$\Lambda(\mathfrak{M}) = -\left[f(\mathfrak{M})D\right]^{-1}$$

On a une solution possible en prenant :

$$\Lambda(M) = -\left[f(M)D\right]^{-1}$$

On remarque que le déterminant $\Delta\left[f(M)D\right]$ n'est autre que le déterminant fonctionnel :

$$\frac{D(f_1\ f_2\ \ldots\ f_n)}{D(x^1\ x^2\ \ldots\ x^n)}\ .$$

La condition : "a racine simple de l'équation $f(x) = 0$" du chapitre I , est remplacée ici par :

$$\frac{D\left[f(M)\right]}{D(M)} \neq 0$$

*3.8. - **PROCEDE (P)**.*

Soit une itération $\phi_p(M)$ d'ordre p pour une racine $\mathfrak{M}$ de $f(M) = 0$. On sait que, d'après la définition :

$$\phi_p(M) = \mathfrak{M} + \frac{1}{p!}\,\phi(\mathfrak{M})\left[D(M - \mathfrak{M})\right]^{(p)} + \ldots\ ;$$

les termes non écrits sont au moins en $\left[D(M - \mathfrak{M})\right]^{(p+1)}$

On remarque que $\frac{1}{p!}\,\phi(\mathfrak{M})\left[D(M - \mathfrak{M})\right]^{(p)}$ est une "forme" homogène de degré p , conformément à la définition précédente, par rapport à $(M - \mathfrak{M})$, soit $\mathcal{F}_p$. On peut donc écrire :

$$F_p(M) = \phi_p(M) - M = -(M - \mathfrak{M}) + \mathcal{F}_p + \ldots$$

les termes non écrits sont des formeshomogènes de degré supérieur ou au moins égal à p+1 .

On a, en appliquant à F_p l'opérateur D :

$$F_p(M)D = -I + \mathcal{F}_p D + \dots$$

d'où :

$$I + F_p(M)D = \mathcal{F}_p D + \dots$$

$$\left[I + F_p(M)D\right] F_p(M) = (\mathcal{F}_p D + \dots)\left[-(M - \mathcal{M}) + \mathcal{F}_p + \dots\right]$$

D'après l'égalité 3.(3), le second membre s'écrit :

$$-p\,\mathcal{F}_p + \text{formes homogènes de degré} \geq p+1$$

et :

$$F_p(M) + \frac{1}{p}\left[1 + F_p(M)D\right] F_p(M) = -(M - \mathcal{M}) + \text{formes homogènes de degré} \geq p+1$$

ce qui prouve que l'itération :

$$\phi_{p+1}(M) = M + F_{p+1}(M)$$

avec :

$$F_{p+1}(M) = F_p(M) + \frac{1}{p}\left[1 + F_p(M)D\right] F_p(M)$$

est une itération d'ordre p+1 .

3.9. - *CAS PARTICULIER DE DEUX VARIABLES*.

Soit le système :

$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0$$

et soit (a,b) un couple de racines.

On a une itération du second ordre en prenant $\Lambda(M) = \Lambda(x,y)$ telle que :

$$I + \Lambda(a,b) \begin{Vmatrix} f'_x(a,b) & f'_y(a,b) \\ g'_x(a,b) & g'_y(a,b) \end{Vmatrix} = 0$$

On obtient une solution en prenant :

$$\Lambda(x,y) = -\begin{vmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{vmatrix}^{-1}$$

ou en explicitant :

3.(6) $$\Lambda(x,y) = \frac{1}{\frac{D(f,g)}{D(x,y)}} \begin{vmatrix} g'_y(x,y) & -f'_y(x,y) \\ -g'_x(x,y) & f'_x(x,y) \end{vmatrix}$$

d'où l'itération :

$$\begin{cases} \phi(x,y) = x + \lambda_1^1(x,y)\, f(x,y) + \lambda_2^1(x,y)\, g(x,y) \\ \psi(x,y) = y + \lambda_1^2(x,y)\, f(x,y) + \lambda_2^2(x,y)\, g(x,y) \end{cases}$$

avec :

$$\lambda_1^1 = -\frac{g'_y}{f'_x g'_y - f'_y g'_x} \qquad \lambda_2^1 = \frac{f'_y}{f'_x g'_y - f'_y g'_x}$$

$$\lambda_1^2 = \frac{g'_x}{f'_x g'_y - f'_y g'_x} \qquad \lambda_2^2 = \frac{-f'_x}{f'_x g'_y - f'_y g'_x}$$

EXEMPLE : *Equation algébrique à coefficients complexes.*

$$f(z) \equiv P(x,y) + i\, Q(x,y) = 0 \qquad (z = x + i\, y)$$

Résoudre l'équation $f(z) = 0$ revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0 \end{cases}$$

les polynômes $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ satisfaisant aux conditions de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

La fonction $\Lambda(x,y)$ définie par 3.(6) s'écrit ici :

$$\Lambda(x,y) = \frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} & -\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\Lambda(x,y) = \frac{1}{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \\ -\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

On retrouve les expressions obtenues à partir de l'itération de Newton-Raphson :

$$z - \frac{f(z)}{f'(z)} = x + i\,y - \frac{P(x,y) + i\,Q(x,y)}{P'_x(x,y) + i\,Q'_x(x,y)}$$

Supposons qu'on ait construit, par le procédé (P), à partir de cette itération du second ordre, une itération d'ordre p : ϕ_p et ψ_p.

Appliquons la théorie précédente pour construire une itération d'ordre p+1. Soit :

$$\begin{cases} \phi_p = x + F(x,y) \\ \psi_p = y + G(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} + \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & 1 + \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{p+1} \\ \psi_{p+1} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} \phi_{p+1} = x + F + \frac{1}{p}\left(F\left[1 + \frac{\partial F}{\partial x}\right] + G\,\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ \psi_{p+1} = y + G + \frac{1}{p}\left(F\,\frac{\partial G}{\partial x} + G\left[1 + \frac{\partial G}{\partial y}\right]\right) \end{cases}$$

*3.10. – **SERIES ITERATIVES**.*

Soit une itération du second ordre :

$$\phi(M) = M + F(M) = \mathfrak{M} + L_2(M - \mathfrak{M})$$

où $L_2(M - \mathfrak{M})$ désigne une matrice colonne développement de Taylor commençant par des termes du second degré au moins.

On peut écrire :

$$F(M) = -(M - \mathfrak{M}) + L_2(M - \mathfrak{M})$$

D'une façon générale, on désigne par ϕ_p une itération d'ordre p :

$$\phi_p = M + F_p(M) = \mathfrak{M} + L_2(M - \mathfrak{M})$$

ou :

$$F_p = -(M - \mathfrak{M}) + L_p(M - \mathfrak{M})$$

où $L_p(M - \mathfrak{M})$ désigne une matrice colonne développement de Taylor commençant par des termes de degré p au moins.

Il est à remarquer que :

$$I + F_p(M)\, D = L_p(M - \mathfrak{M})\, D$$

Comme L_p est un infiniment petit d'ordre p par rapport à $(M - \mathfrak{M})$ considéré comme infiniment petit principal, $L_p(M - \mathfrak{M})D$ est un infiniment petit d'ordre p-1 .

Nous nous proposons de construire, par le procédé (P), comme dans le cas d'une seule équation, des itérations d'ordre croissant que nous notons $\phi = \phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_p, \ldots$ correspondant respectivement à $F = F_2, F_3, \ldots F_p, \ldots$ définies par :

$$F_p = F + \frac{1}{2!} G_2 F^2 + \frac{1}{3!} G_3 F^3 + \ldots + \frac{1}{(p-1)!} G_{p-1} F^{p-1}$$

où :

$$F^p = \mathcal{F}^{p-1} F$$

$\mathcal{F}$ étant défini à partir de F comme plus haut $\mathcal{O}$ à partir de V. Les G sont des (n-n)-matrices définies par la relation de récurrence :

3.(7) $$G_p = \left[(p-1)\, G_{p-1}\, \mathcal{F}^{p-2}\, G\, F + G_{p-1}\, \underline{F^{p-1}}\, D \right] \mathcal{F}^{p-1}$$

avec :

$$G = G_2 = (I + F\, D)\, \mathcal{F}^{-1}$$

Remarquons que dans le cas particulier d'une seule équation, nous retrouvons les résultats déjà indiqués au chapitre I .

A partir de F construisons par le procédé (P) une itération du troisième ordre :

$$F_3 = F + \frac{1}{2} (I + F D) F$$

$$= F + \frac{1}{2} G \mathcal{F} F$$

3.(8) $$F_3 = F + \frac{1}{2} G F^2$$

Appliquons, maintenant, le procédé (P) à F_3 :

$$F_4^* = F_3 + \frac{1}{3} (I + F_3 D) F_3$$

$$= F_3 + \frac{1}{3} (I + F_3 D) (F + \frac{1}{2} G F^2)$$

On remarque que $G \mathcal{F} = I + F D$ est un infiniment petit du premier ordre, donc $G F^2$ est un infiniment petit du second ordre.

Comme $I + F_3 D$ est un infiniment petit du second ordre, puisque F_3 définit une itération d'ordre 3, le produit $(I + F_3 D) G F^2$ est du quatrième ordre, en supprimant cet infiniment petit, on remplace F_4^* par F_4 qui est encore une itération d'ordre 4 et :

$$F_4 = F_3 + \frac{1}{3} (I + F_3 D) F$$

mais, en utilisant l'expression de F_3 donnée par 3.(8) , et les relations 3.(4) et 3.(5) :

$$I + F_3 D = I + F D + \frac{1}{2!} \underline{G}\, 2\, \underline{\mathcal{F}}\, F D + \frac{1}{2!} G \underline{F}^2 D$$

$$= G \mathcal{F} (I + F D) + \frac{1}{2!} G \underline{F}^2 D$$

$$= G \mathcal{F} G \mathcal{F} + \frac{1}{2!} G \underline{F}^2 D$$

$$= \frac{1}{2!} (2 G \mathcal{F} G \mathcal{F} + G \underline{F}^2 D)$$

De là :

$$(I + F_3\, D)\, F = \frac{1}{2!}\left(2\, G\, \mathcal{F}\, G\, \mathcal{F} + G\, \underline{F}^2\, F\right) F$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\left(2\, G\, \mathcal{F}\, G\, \mathcal{F} + G\, \underline{F}^2\, D\right) \mathcal{F}^{-2}\right] \mathcal{F}^2\, F$$

et d'après la relation de récurrence 3.(7) :

$$(I + F_3\, D)\, F = \frac{1}{2!}\, G_3\, F^3$$

Remarquons que $(I + F_3\, D)\, F$ étant un infiniment petit du troisième ordre, il en est de même de $\frac{1}{2!}\, G_3\, F^3$. Finalement :

$$F_4 = F + \frac{1}{2!}\, G_2\, F^2 + \frac{1}{3!}\, G_3\, F^3$$

Supposons que la loi soit vraie jusqu'à l'ordre p et montrons qu'elle l'est encore à l'ordre p+1 .

Par hypothèse :

3.(9) $$F_p = F + \frac{1}{2!}\, G_2\, F^2 + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}\, G_{p-1}\, F^{p-1}$$

représente une itération d'ordre p . $I + F_p\, D$ est un infiniment petit d'ordre p-1 .

On a :

$$(I + F_q\, D)\, F = \frac{1}{(q-1)!}\, G_q\, F^q \qquad \text{pour} \qquad q \leq p-1$$

Nous allons montrer que cette égalité est encore vraie pour q = p

$$I + F_p\, D = I + F\, D + \underline{G_2\, \mathcal{F}}\, F\, D + \frac{1}{2!}\, \underline{G_3\, \mathcal{F}^2}\, F\, D + \ldots + \frac{1}{(p-2)!}\, \underline{G_{p-1}\, \mathcal{F}^{p-2}}\, F\, D$$

$$+ \frac{1}{2!}\, G_2\, \underline{F}^2\, D + \frac{1}{3!}\, G_3\, \underline{F}^3\, D + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}\, G_{p-1}\, \underline{F}^{p-1}\, D$$

Remplaçant $I + F\, D$ par $G\, \mathcal{F}$ et mettant $F\, D = G\, \mathcal{F} - I$ en facteur, il vient :

$$I + F_p\, D = G\, \mathcal{F} + \left(G\, \mathcal{F} + \frac{1}{2!}\, G_3\, \mathcal{F}^2 + \ldots + \frac{1}{(p-2)!}\, G_{p-1}\, \mathcal{F}^{p-2}\right)(G\, \mathcal{F} - I)$$

$$+ \frac{1}{2!}\, G_2\, \underline{F}^2\, D + \frac{1}{3!}\, G_3\, \underline{F}^3\, D + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}\, G_{p-1}\, \underline{F}^{p-1}\, D$$

En développant la première ligne, on trouve :

$$(I + F_p D) = -\frac{1}{2!}G_3 \mathcal{F}^2 - \frac{1}{3!} G_4 \mathcal{F}^3 - \dots - \frac{1}{(p-2)!} G_{p-1} \mathcal{F}^{p-2}$$

$$+ G\mathcal{F}G\mathcal{F} + \frac{1}{2!}G_3 \mathcal{F}^2 G\mathcal{F} + \dots + \frac{1}{(p-3)!} G_{p-2} \mathcal{F}^{p-3} G\mathcal{F} + \frac{1}{(p-2)!} G_{p-1} \mathcal{F}^{p-2} G\mathcal{F}$$

$$+ \frac{1}{2!}G_2 \underline{F}^2 D + \frac{1}{3!}G_3 \underline{F}^3 D + \dots + \frac{1}{(p-2)!} G_{p-2} \underline{F}^{p-2} D + \frac{1}{(p-1)!} G_{p-1} \underline{F}^{p-1} D$$

Tous les termes écrits les uns au dessous des autres se détruisent à l'exception du dernier terme de la deuxième et troisième ligne. Finalement :

$$I + F_p D = \frac{1}{(p-1)!} \left[(p-1) G_{p-1} \mathcal{F}^{p-2} G \mathcal{F} + G_{p-1} \underline{F}^{p-1} D \right]$$

$$= \frac{1}{(p-1)!} G_p \mathcal{F}^{p-1}$$

Par suite :

$$3.(10) \qquad \frac{1}{p} (I + F_p D) F = \frac{1}{p!} G_p F^p$$

Comme $I + F_p D$ est un infiniment petit d'ordre p-1, il en résulte que le premier membre de 3.(10), donc le second, est un infiniment petit d'ordre p .

Ceci posé, appliquons le procédé (P) à partir de F_p pour obtenir une itération d'ordre p+1 , F^*_{p+1}

$$F^*_{p+1} = F_p + \frac{1}{p} (I + F_p D) F_p$$

$$= F_p + \frac{1}{p} (I + F_p D) \left(F + \frac{1}{2!} G_2 F^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!} G_{p-1} F^{p-1} \right)$$

On remarque que la somme :

$$\frac{1}{2!} G_2 F^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!} G_{p-1} F^{p-1}$$

est un infiniment petit du second ordre au moins . Le produit de $(I + F_p D)$ par cet infiniment petit donnera un infiniment petit d'ordre p+1 au moins, On peut le supprimer et on aura une itération d'ordre p+1 avec :

$$F_{p+1} = F_p + \frac{1}{p} (I + F_p D) F$$

En remplaçant le second terme de cette égalité par l'expression trouvée plus haut [3.(10)], on obtient bien l'égalité 3.(9) où p est remplacé par p+1.

Si l'on prolonge indéfiniment la suite $\{\phi_p\}$, on peut écrire, si cette suite admet une limite $\mathcal{G}(M)$:

$$\mathcal{G}(M) = M + F + \frac{1}{2} G_2 F^2 + \ldots + \frac{1}{p!} G_p F^p + \ldots$$

J'appelle cette série $\mathcal{G}(M)$ la série itérative correspondant à l'itération initiale $\phi = M + F$. Quand cette série converge, sa somme est naturellement une racine $\mathcal{R}$ de $F(M) = 0$.

Je n'étudie pas le domaine de convergence de cette série dans le cas général. Il est à prévoir que cette étude, plus compliquée que dans le cas d'une seule équation, puisse être entreprise à partir des résultats du chapitre II.

*3.11. - **APPLICATIONS ET EXEMPLES**. - **Equations Algébriques**.*

PROPRIETE I :

Tout polynôme $Y_n^2 + Z_n$ où Y_n et Z_n sont des polynômes de degré n, peut se mettre sous la forme :

$$Y_n^{*2} + Z_{n-1}^*$$

où Y_n^* et Z_{n-1}^* sont respectivement de degré n et n-1.

En effet, soit :

$$Y_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

$$Z_n = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

Le polynôme $Y_n^2 + Z_n$ peut s'écrire :

$$\left[(x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) + \frac{b_0}{2}\right]^2 - b_0 \left[x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n\right] - \frac{b_0^2}{4}$$

$$+ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

c'est à dire :

$$Y_n^{*2} + Z_{n-1}^*$$

en posant :

$$Y_n^* = Y_n + \frac{b_0}{2}$$

$$Z_{n-1}^* = (b_1 - a_1 b_0) x^{n-1} + \ldots + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) x + b_n - b_0 a_n - \frac{b_0^2}{4}$$

PROPRIETE II :

Tout polynôme de degré 2n peut se mettre, par un calcul simple, sous la forme $Y_n^2 + Z_{n-1}$ où Y_n et Z_{n-1} sont respectivement de degré n et n-1 .

a) La propriété est évidente pour un polynôme du second degré :

$$x^2 + a x + b = (x - \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

b) Supposons que tout polynôme de degré 2n-2 , P_{2n-2} *puisse s'écrire :*

$$P_{2n-2} = Y_{n-1}^2 + Z_{n-2} \qquad \begin{array}{l} d^\circ\ Y_{n-1} = n-1 \\ d^\circ\ Z_{n-2} = n-2 \end{array}$$

alors :

$$P_{2n} = x^2 P_{2n-2} + P_1$$

$$= x^2 \left(Y_{n-1}^2 + Z_{n-2}\right) + P_1$$

$$= (x Y_{n-1})^2 + x^2 Z_{n-2} + P_1 = Y_n^{*2} + Z_n^*$$

La propriété I permet d'écrire P_{2n} sous la forme voulue.

APPLICATION I :

Soit à résoudre l'équation de degré 2n :

$$E_{2n} \equiv x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$$

Elle peut s'écrire :

$$\left(f(x)\right)^2 + g(x) = 0 \qquad \text{d'après la propriété II}$$

où g(x) est un polynôme de degré n-1 et f(x) est un polynôme de degré n .

Au lieu de résoudre l'équation de degré 2n nous sommes amenés à résoudre simultanément deux équations de degré n et n-1 respectivement :

3.(11)
$$\begin{cases} f(x) - y = 0 \\ g(x) + y^2 = 0 \end{cases}$$

L'itération du second ordre correspondant à ce système se construit facilement, et l'on a :

3.(12)
$$\phi = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \frac{1}{2y\,f' + g'} \begin{Bmatrix} 2y(f-y) + (g+y^2) \\ -g'(f-y) + f'(g+y^2) \end{Bmatrix}$$

EXEMPLE 1 :

Soit à résoudre l'équation :

$$E \equiv x^8 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$$

L'équation E peut s'écrire :

$$E \equiv \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} - 1\right)^2 + \frac{7}{4}x^2 + 2x - 3 = 0$$

et le système 3.(11) :

$$f(x) - y \equiv (2x^3 - 2x^2 + x - 2) - y = 0$$

$$g(x) + y^2 \equiv (7x^2 + 8x - 12) + y^2 = 0$$

La résolution de ce système à l'aide de l'itération 3.(12) est résumée dans le tableau de la page suivante :

$$f = 2x^3 - 2x^2 + x - 2 \qquad f' = 6x^2 - 4x + 1$$

$$g = 7x^2 + 8x - 12 \qquad g' = 14x + 8$$

Je pose :

$$N_x = 2y(f-y) + (g+y^2)$$

$$N_y = -g'(f-y) + f'(g+y^2)$$

$$D = 2y\,f' + g'$$

Je prends comme valeurs de départ :

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 0$$

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1	0,884	0,730	0,728 822	0,730 215	+ 0,730 214 782	+ 0,730 215 238
y_i	0	- 1,409	- 1,810	- 1,557 241	- 1,557 495	- 1,557 491 183	- 1,557 490 844
f'	3	2,022 976	1,277 490	1,272 275 682	1,278 423 877	1,278 422 543 858	1,278 424 810 844
g'	22	20,098	18,220	18,204 808	18,223 010	18,223 008 888 000	18,223 013 332 000
D	22	14,395 253 832	14,106 772	14,242 428 258	14,240 733 030	14,240 748 319 592	14,240 743 201 051
$f-y$	- 1	0,089 953 068	0,052 234	- 0,001 899 274	0,000 003 751	- 0,000 000 370 218	- 0,000 000 000 710
$g+y^2$	3	2,122 753	0,182 400	- 0,024 333 493	0,000 008 299	- 0,000 007 935 972	- 0,000 000 002 015
N_x	3	1,925 825 254	0,015 204 588	- 0,018 418 238	- 0,000 003 385	- 0,000 008 782 746	0,000 000 000 197
N_x/D	0,136	0,133 788 087	0,001 077 822	- 0,001 293 185	- 0,000 000 238	- 0,000 000 478 291	0,000 000 000 014
N_y	3,1	2,888 501 518	- 0,744 253 720	0,003 817 197	- 0,000 057 745	- 0,000 003 397 993	0,000 000 010 383
N_y/D	1,409	0,200 856 521	- 0,052 758 813	0,000 253 973	- 0,000 004 055	- 0,000 000 238 880	0,000 000 000 728
x_{i+1}	0,884	0,730	0,728 922	0,730 215	0,730 214 782	0,730 215 238	0,730 215 237 988
y_{i+1}	- 1,409	- 1,810	- 1,557 241	- 1,557 495	- 1,557 491 183	- 1,557 490 844	- 1,557 490 844 728

APPLICATION II :

Soit à résoudre l'équation de degré 2n+1 :

$$E_{2n+1} \equiv x^{2n+1} + a_0\, x^{2n} + a_1\, x^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}\, x + a_{2n} = 0$$

Elle peut s'écrire :

$$E_{2n+1} \equiv x\left(x^{2n} + a_0\, x^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}\right) + a_{2n} = 0$$

ce qui, d'après la propriété II, s'écrit encore :

$$E_{2n+1} \equiv x\left[\left(f(x)\right)^2 + \varphi(x)\right] + a_{2n} = 0$$

ou :

$$E_{2n+1} \equiv x\left(f(x)\right)^2 + \psi(x) = 0$$

où :

$f(x)$ est un polynôme de degré n ,

$\psi(x) = x\,\varphi(x) + a_{2n}$ un polynôme de degré n .

Au lieu de résoudre l'équation de degré 2n+1 nous sommes amenés à résoudre simultanément deux équations de degré n :

$$\begin{cases} f(x) - y = 0 \\ \psi(x) + x\, y^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la même forme que le système 3.(11)

3.(13)
$$\begin{cases} f(x) - y = 0 \\ g(x) + y^2 = 0 \end{cases}$$

où $g(x) = \frac{1}{x}\,\psi(x)$ est un polynôme de degré n-1 plus un terme en $\frac{1}{x}$.

EXEMPLE 2 :

Soit à résoudre l'équation :

$$E \equiv x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 5 = 0$$

L'équation E peut s'écrire :

$$E \equiv x\left(x^2 + 3x - 1\right)^2 - 2x^2 - x - 5 = 0$$

et le système 3.(13) :

$$f(x) - y = x^2 + 3x - 1 - y = 0$$

$$g(x) + y^2 = -2x - 1 - \frac{5}{x} + y^2 = 0$$

La résolution de ce système à l'aide de l'itération 3.(12) est résumée dans le tableau de la page suivante :

$$f = x^2 + 3x - 1$$

$$f' = 2x + 3$$

$$g = -2x - 1 - \frac{5}{x}$$

$$g' = -2 + \frac{5}{x^2}$$

Je pose, comme dans l'exemple 1 :

$$N_x = 2y(f-y) + (g+y^2)$$

$$N_y = -g'(f-y) + f'(g+y^2)$$

$$D = 2y\,f' + g'$$

Je prends comme valeurs de départ :

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 3$$

i	0	1	2	3	4
x_i	1	0,970	0,970 380	0,968 952 705	0,968 951 153
y_i	3	2,849	2,852 680	2,845 725 479	2,845 719 795
f'	5	4,940	4,940 720	4,937 905 410	4,937 902 308
g'	3	3,314 061	3,310 118 740	3,325 554 649	3,325 571 705
D	33	31,462 181	31,498 704 999	31,429 401 125	31,429 344 381
f-y	0	0,001 900	- 0,000 001 470	0,000 001 980	$9,000\ 10^{-10}$
$g+y^2$	1	- 0,022 162	0,044 336 359	0,000 037 512	$8,548\ 10^{-10}$
N_x	1	- 0,011 336	0,044 327 972	0,000 048 781	$5,777\ 10^{-9}$
N_x/D	0,030	- 0,000 360	0,001 407 295	0,000 001 552	$1,838\ 10^{-10}$
N_y	5	- 0,115 777	0,219 058 401	0,000 178 846	$2,403\ 10^{-10}$
N_y/D	0,151	- 0,003 680	0,008 954 521	0,000 005 684	$7,6\ 10^{-12}$
x_{i+1}	0,970	0,970 360	0,968 952 705	0,968 951 153	0,968 951 151
y_{i+1}	2,849	2,852 680	2,845 725 479	2,845 719 795	2,845 719 795

CHAPITRE IV

RACINES PRESQUE EGALES

Soit $f(x) = 0$ une équation qui admet q racines $a_1, a_2, \ldots, a_q$, comprises dans un intervalle I de longueur ε. Je conviens de dire que ces q racines sont presque égales ou très voisines si les conditions suivantes sont satisfaites :

1°) ε n'est pas "très grand" par rapport à l'approximation avec laquelle on désire calculer ces racines ;

2°) toute racine de $f(x)$ autre que $a_1, a_2, \ldots, a_q$ est située à une distance d de l'intervalle I, très grande par rapport à ε.

Le cas des racines presque égales ou très voisines présente de sérieuses difficultés.

4.1. – RAPPEL DE METHODES CONNUES.

On connait jusqu'à présent pour résoudre ce problème les méthodes suivantes :

1°) *La méthode élémentaire* pour le cas de deux racines très voisines.

Soit $f(x) = 0$ l'équation, où $f(x)$ est une fonction continue dans tout un intervalle contenant les deux racines presque égales a et a*. La dérivée $f'(x)$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle (a, a^*), soit β cette valeur de x annulant f'. Supposons que l'on ait déterminé β par une

méthode quelconque. En posant :

$$x = \beta + \xi$$

on peut écrire :

$$f(x) = f(\beta) + \xi\, f'(\beta) + \frac{\xi^2}{2} f''(\beta) + \ldots$$

En négligeant les termes du développement à partir de ξ^3 et compte-tenu du fait que $f'(\beta)$ est nul, il vient, puisque $f(a) = f(a^*) = 0$:

$$\left.\begin{matrix} a \\ a^* \end{matrix}\right\} = \beta \pm \sqrt{-2\,\frac{f(\beta)}{f''(\beta)}}$$

L'approximation de a et a* par cette méthode est d'autant meilleure évidemment que ξ est plus petit.

2°) ***La méthode de Laguerre*** pour les équations algébriques.

C' est une itération du troisième ordre définie par :

$$\phi(x) = x - \frac{n\, f}{f' \pm n\sqrt{H}}$$

où H désigne le hessien de f, c'est à dire :

$$H = (n-1)^2\, f'^2 - n(n-1)\, f\, f''$$

(n est le degré de l'équation $f(x) = 0$).

On sait que la méthode de Laguerre converge toujours quel que soit le point de départ ; la convergence de la méthode n'est qu'approximativement linéaire pour les racines très voisines, comme on le verra plus loin pour tous les procédés d'itération d'ordre p .

3°) Pour mémoire, rappelons que toute autre méthode d'itération, par exemple, celle de Newton-Raphson, peut s'appliquer au calcul des racines presque égales dès que l'on a localisé ces racines, et qu'on a pris un point de départ suffisamment proche de la racine qu'on veut calculer.

Je vais montrer, maintenant, qu'une itération d'ordre p ne converge que linéairement, tout au moins au début, c'est à dire si l'écart initial - différence entre la racine à calculer et la première valeur approché e -

est de l'ordre de ε (longueur de l'intervalle I contenant les racines presque égales).

4.2. - *CONVERGENCE D'UNE ITERATION D'ORDRE p DANS LE CAS DE RACINES TRES VOISINES.*

Soit $\phi(x)$ une itération d'ordre p, convergente dans le voisinage d'une racine a.

Supposons qu'on veuille calculer a avec une approximation de $10^{-p'q}$.

$$x_{N+1} - a = (x_N - a)^p \frac{\phi^{(p)}(a)}{p!} + \ldots$$

Si x_N est "assez proche de a" (par exemple $|x_N - a| < 10^{-q}$), et si $\phi^{(p)}(a)$ n'est pas "trop grand" (par exemple $|\phi^{(p)}(a)| < 10^{-p''q}$ avec $p'' < p'$) $|x_{N+1} - a|$ sera notablement moindre que $|x_N - a|$.

C'est ce qui se passe ordinairement pour une itération d'ordre égal ou supérieur à 2, lorsqu'il n'y a pas de racine très voisine de a, c'est à dire quand la racine la plus proche de a diffère de a d'une quantité nettement supérieure à 10^{-rq} ($r < p'$).

Mais dès qu'il y a une racine qui ne diffère de a que d'une quantité de l'ordre de 10^{-rq}, les choses se passent d'une façon très différente.

Soit, pour fixer les idées, un couple de racines a et a* différant de moins de 10^{-q} et que l'on veut calculer avec une approximation de 10^{-4q}. Entre a et a* la dérivée f'(x) s'annule pour $x = \beta$ et $|\beta - a|$ comme $|\beta - a^*|$, est inférieur à 10^{-q}.

Prenons une itération du second ordre – du type Newton-Raphson par exemple – la valeur de départ α_1 étant telle que :

$$|\alpha_1 - a| < \frac{1}{k} 10^{-q} \qquad \text{(k de l'ordre de quelques unités)}$$

$$|\alpha_1 - a^*| \sim 10^{-q}$$

On a :

$$\phi(x) - a = (x-a)^2 \left[\frac{1}{2}\phi''(a) + \frac{x-a}{6}\phi'''(\xi)\right] \qquad \xi \in (a, x)$$

$$\phi(a^*) - a = a^* - a = (a^*-a)^2 \left[\frac{1}{2}\phi''(a) + \frac{a^*-a}{6}\phi'''(\xi')\right] \qquad \xi' \in (a, a^*)$$

Cette égalité montre que $\frac{1}{2}\phi''(a)$ est en général de l'ordre de $\frac{1}{a^*-a}$ ou 10^q.

Donc :

$$\phi(\alpha_1) - a = \alpha_2 - a = (\alpha_1 - a)^2 (10^q + \ldots)$$

$$\frac{\alpha_2 - a}{\alpha_1 - a} \quad \text{est donc de l'ordre de } \frac{1}{k}$$

La convergence n'est qu'approximativement linéaire au début.

Dans l'exemple précédent, prenons :

$$q = 2 \qquad k = 3 \qquad ; \qquad a^*-a = 10^{-2} \qquad \alpha_1 - a = \frac{1}{3} 10^{-2}$$

$\frac{1}{2}\phi''(a)$ est de l'ordre de 100.

Au bout de trois ou quatre itérations, on n'aura encore que la valeur approchée α' telle que :

$$\alpha' - a \sim \frac{1}{3} 10^{-4}$$

Puis, l'itéré suivant α_i' sera tel que :

$$\frac{\alpha_i' - a}{\alpha' - a} \sim \frac{1}{3} 10^{-2}$$

Ce n'est qu'à l'itération suivante qu'on aura l'approximation cherchée 10^{-8}.

En définitive, avec une valeur de départ approchée à $\frac{1}{300}$ de a, il a fallu cinq à six itérations pour avoir l'approximation 10^{-8} alors que dans le cas d'une itération du second ordre – c'est à dire à convergence quadratique – deux à trois itérations suffisent pour obtenir cette approximation, en partant d'une valeur approchée à 3.10^{-3}.

Ceci se généralise aisément à une itération d'ordre p quelconque supérieure à 2, et à un nombre quelconque de racines très voisines.

Soient $\phi(x)$ une telle itération, a_1 et a_2 deux des racines très voisines situées dans l'intervalle I de longueur ε. On a, comme plus haut :

$$\phi(a_2) - a_1 = a_2 - a_1 = (a_2 - a_1)^p \left[\frac{\phi^{(p)}(a_1)}{p!} + \frac{(a_2 - a_1)}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi) \right] \qquad \xi \in (a_1, a_2)$$

Cette égalité montre que $\frac{1}{p!}\phi^{(p)}(a_1)$ est en général de l'ordre de $\frac{1}{(a_2-a_1)^{p-1}}$.

D'où en désignant par α_i et α_{i+1} deux itérés consécutifs pour la racine a_1 :

$$\alpha_{i+1} - a_1 = (\alpha_i - a_1)^p \left[\frac{\phi^{(p)}(a_1)}{p!} + \dots \right]$$

$$= \frac{(\alpha_i - a_1)^p}{(a_2 - a_1)^{p-1}} \left[1 + o(1)\right] \sim (\alpha_i - a_1)\, 0(1)$$

si $\alpha_i - a_1$ et $a_2 - a_1$ sont du même ordre de grandeur.

L'itération se comporte donc comme une itération du premier ordre, au moins au début.

4.3. - *ITERATION DE NEWTON-RAPHSON.*

Reprenons le calcul de Newton-Raphson dans le cas de deux racines très voisines, dans le but de comparer les résultats avec ceux que j'obtiendrai par une des méthodes indiquées dans la suite de ce chapitre.

Soit donc l'itération :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{f}{f'}$$

$$\phi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f\, f''}{f'^2}$$

$$\phi''(x) = \frac{(f'\, f'' + f\, f''')f' - 2\, f\, f''^2}{f'^3}$$

Je suppose que la racine β de la dérivée $f'(x)$ comprise entre les deux racines presque égales de $f(x) = 0$ a été déterminée au préalable. Je peux écrire :

$$\phi''(a) = \frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{f''(\beta) + (a-\beta)\, f'''(\beta) + \dots}{(a-\beta)\, f''(\beta) + \frac{(a-\beta)^2}{2} f'''(\beta)}$$

$$= \frac{1}{a-\beta} + \frac{1}{2} \frac{f'''(\beta)}{f''(\beta)} + o(a-\beta)$$

Si je désigne par α_i la i-ième valeur approchée de la racine a obtenue par cette itération, j'ai :

$$\alpha_{i+1} - a = \frac{(\alpha_i - a)^2}{2} \left[\frac{1}{a-\beta} + \frac{1}{2} \frac{f'''(\beta)}{f''(\beta)} + o(a-\beta) \right]$$

ou :

$$M_i = \frac{\alpha_{i+1} - a}{\alpha_i - a} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_i - a}{a-\beta} + \ldots$$

Dans le cas où $a-\beta$ est petit, on part d'une valeur α_1 telle que $\alpha_1 - a$ soit sensiblement du même ordre de grandeur que $a-\beta$, la convergence est approximativement linéaire. D'autre part, l'expression de M_i montre que cette quantité finit par garder un signe constant, car si α_1 est entre a et β, $\frac{\alpha_i - a}{a-\beta}$ est négatif, donc α_{i+1} est de l'autre côté de a par rapport à α_i et M_{i+1} sera positif. La méthode de Newton-Raphson donne donc pour chaque racine une suite monotone (Cf. chapitre I, p. 18).

4.4. - *ARTIFICES DIVERS*.

Soit :

$$\phi(x) = x - \lambda(x) f(x)$$

une itération du premier ordre, convergente pour la racine a de $f(x) = 0$

$$\phi'(a) = 1 - \lambda(a) f(a)$$

Si l'on prend :

$$\lambda(x) = \frac{1 + \varepsilon^2(x)}{f'(x)}$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction astreinte à la seule condition :

$$|\varepsilon(a)| < 1$$

on aura :

$$\phi'(a) = -\varepsilon^2(a)$$

L'itération $\phi(x)$ sera du premier ordre et enveloppante.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \varepsilon^2(x) \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Pour des racines très voisines, on pourra prendre, par exemple :

$$\varepsilon(x) = \sqrt{k}\ f'(x) \qquad (k \text{ nombre} > 0)$$

puisque, dans le voisinage d'une racine à calculer, $f'(x)$ est petit, car la

racine de f(x) qu'on veut calculer est voisine d'une racine de f'(x) ; et on aura :

$$\phi(x) = x - \frac{f}{f'} - k\, f\, f'$$

Dans la pratique, cependant, une telle itération donne liéu à un calcul aussi compliqué que celle de Newton-Raphson. Ce qui est plus grave, c'est que s'il est facile de choisir k pour que $\sqrt{k}\,|f'(x)|$ soit inférieur à 1, dans le voisinage de la racine, l'itération peut être très tardivement enveloppante si l'on prend k trop petit, et encore bien plus lentement convergente que celle de Newton-Raphson si on prend k trop grand.

Dans les méthodes qui suivent, on remplacera f'(x) par une valeur approchée plus simple à calculer, et on procèdera de même pour $\varepsilon^2(x)$.

Pour la clarté de l'exposé, je distinguerai plusieurs cas, suivant que l'on a affaire à deux racines presque égales, ou plus de deux racines presque égales.

4.5. – *CAS DE DEUX RACINES TRES VOISINES*.

Je désigne toujours par β la racine de la dérivée f'(x) (ou l'une des racines de la dérivée) comprise entre les deux racines a et a* presque égales de f(x).

Je suppose que a*-a, donc β-a et β-a* suffisamment petits pour que $(\beta-a)^2$ soit négligeable devant β-a eu égard à l'approximation demandée.

Dans ces conditions, je peux prendre comme premières valeurs approchées α_1 et α_1^* de a et a* respectivement les deux valeurs données par la méthode élémentaire indiquée au début de ce chapitre :

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_1^*\end{matrix}\right\rangle = \beta \pm \sqrt{-2\,\frac{f(\beta)}{f''(\beta)}}$$

Ce sont ces deux valeurs que je prends comme points de départ de mes itérations.

Dans le voisinage de a, je peux écrire :

$$f'(x) = f'(\beta) + (x-\beta)\, f''(\beta) + \frac{(x-\beta)^2}{2!}\, f'''(\beta) + \ldots$$

Je suppose que $\frac{f'''(\beta)}{2}$ n'est pas trop grand de telle sorte que le

troisième terme de ce développement soit négligeable devant les deux premiers dans le voisinage de a , d'où :

$$f'(x) \sim (x-\beta)\, f''(\beta)$$

L'itération de Newton-Raphson se réduit donc approximativement à :

4.(1) $$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{(x-\beta)\, f''(\beta)}$$

C'est une itération du premier ordre qui donne lieu à des calculs plus simples que celle de Newton-Raphson, et :

$$\phi'(a) = 1 - \frac{f'(a)}{(a-\beta)\, f''(\beta)} = 1 - \frac{(a-\beta)\, f''(\beta) + \frac{(a-\beta)^2}{2} f'''(\beta) + \ldots}{(a-\beta)\, f''(\beta)}$$

$$= -\frac{(a-\beta)}{2} \frac{f'''(\beta)}{f''(\beta)} + \ldots$$

Comme $\frac{f'''(\beta)}{f''(\beta)}$ ne dépend pas de la racine a , $\phi'(a)$ et $\phi'(a^*)$ sont de signes contraires puisque $a-\beta$ et $a^*-\beta$ le sont. Il en résulte que l'itération 4.(1) est monotone pour l'une des deux racines a ou a^*, et enveloppante pour l'autre.

La convergence de cette itération est comparable à celle de Newton-Raphson.

L'exemple suivant, dans lequel on a mis en parallèle les calculs par les deux méthodes, le montre clairement.

EXEMPLE :

$$f(x) = x^3 + 1{,}59\, x^2 - 8{,}19\, x + 5{,}81$$

Un calcul simple nous donne :

$$\begin{aligned} f(1{,}19) &= +\ 0{,}000\ 658 \\ f(1{,}20) &= -\ 0{,}000\ 400 \\ f(1{,}21) &= -\ 0{,}000\ 420 \\ f(1{,}22) &= +\ 0{,}000\ 604 \end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{aligned} 1{,}19 < a < 1{,}20 \\ 1{,}21 < a < 1{,}22 \end{aligned}$$

La racine positive β de $f'(x)$ est :

$$\beta = 1{,}205\ 194\ 513\ 596$$

d'où :

$$f(\beta) = 0{,}000\ 540\ 321\ 948\ 060$$

$$f''(\beta) = 10{,}411\ 167\ 081\ 576$$

La méthode élémentaire nous donne les deux valeurs de départ :

α_1	=	1,195 006 451 242
α_1^*	=	1,215 382 575 950

Les calculs sont résumés dans les tableaux des deux pages ci-après.
Pour abréger, j'ai posé :

$$\psi(x) = (x-\beta)\ f''(\beta) \quad \text{et} \quad c(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)}$$

REMARQUE :

Le caractère enveloppant n'est souvent mis en évidence qu'après un certain nombre d'itérations lorsque $\alpha_N - a$ devient nettement plus petit que $a-\beta$. En effet :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{(x-\beta)\ f''(\beta)}$$

$$\phi'(a) = -\frac{a-\beta}{2}\ \frac{f'''(\beta)}{f''(\beta)} + \dots$$

$$\phi''(a) = -\frac{f''(a)}{(a-\beta)\ f''(\beta)} + \frac{2\ f'(a)}{(a-\beta)^2\ f''(\beta)} + \dots = -\frac{1}{a-\beta}$$

$$\frac{\alpha_{N+1} - a}{\alpha_N - a} = A(a-\beta) + \frac{(\alpha_N - a)}{2}\left[\frac{1}{a-\beta} + \dots\right] + \dots$$

$\left[\text{où } A = -\frac{1}{2}\ \frac{f'''(\beta)}{f''(\beta)}\right]$.

Pour les premiers itérés, c'est à dire pour N petit, $\alpha_N - a$ est du même ordre de grandeur que $a-\beta$, et dans le second membre, le terme :

$$\frac{\alpha_N - a}{2(a-\beta)}$$

est souvent plus grand que $A(a-\beta)$.

Calcul de a et a* par l'itération de Newton-Raphson

a = 1,194 998 457 027 7

a* = 1,215 372 630 528 4

i	1	2	3	4
α_i	1,195 008 451 242	1,194 998 452 142	1,194 998 457 025	1,194 998 457 027 7
$f(\alpha_i)$	- 1,057 487 080 10^{-6}	0,516 900 10^{-9}	0,289 393 10^{-12}	3,504 10^{-15}
$f'(\alpha_i)$	- 0,105 758 229 520	- 0,105 881 720 292	- 0,105 881 689 753	
$f(\alpha_i)/f'(\alpha_i)$	9,999 100 10^{-6}	- 4,882 785 10^{-9}	- 2,734 10^{-12}	
α_{i+1}	1,194 998 452 142	1,194 998 457 025	1,194 998 457 027 7	
α^*_i	1,215 392 575 950	1,215 372 635 395	1,215 372 630 528 4	
$f(\alpha^*_i)$	1,057 488 288 10^{-6}	0,517 421 584 10^{-9}	1,908 10^{-15}	
$f'(\alpha^*_i)$	0,106 381 009 289	0,106 278 909 157		
$f(\alpha^*_i)/f'(\alpha^*_i)$	9,940 955 10^{-6}	4,868 617 10^{-9}		
α^*_{i+1}	1,215 372 635 395	1,215 372 630 528 4		

Calcul de a et a* par l'itération $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{\psi(x)} = x - c(x)$

i	1	2	3	4
α_i	1,195 008 451 242	1,194 998 481 497	1,194 998 457 100	1,194 998 457 028
$f(\alpha_i)$	- 1,057 487 080 10^{-6}	- 2,590 354 259 10^{-8}	- 7,848 748 10^{-12}	- 0,028 266 10^{-12}
$\psi(\alpha_i)$	- 0,106 089 819 405	- 0,106 179 415 144	- 0,106 179 670 087	- 0,106 179 670 837
$c(\alpha_i)$	9,969 745 10^{-6}	2,439 739 10^{-8}	7,203 997 10^{-11}	0,266 10^{-12}
α_{i+1}	1,194 998 481 497	1,194 998 457 100	1,194 998 457 028	1,194 998 457 027 734
α_i^*	1,215 382 575 950	1,215 372 808 212	1,215 372 830 597	1,215 372 830 526 175
$f(\alpha_i^*)$	1,057 486 288 10^{-6}	- 2,584 053 10^{-9}	7,505 058 10^{-12}	- 2,198 9 10^{-15}
$\psi(\alpha_i^*)$	0,106 089 819 405	0,105 985 822 797	0,105 986 078 684	0,105 986 075 934
$c(\alpha_i^*)$	9,969 738 10^{-6}	- 2,438 572 1 10^{-8}	7,082 510 0 10^{-11}	- 2,073 21 10^{-13}
α_{i+1}^*	1,215 372 808 212	1,215 372 830 597	1,215 372 830 526 175	1,215 372 830 526 382

*4.6. - **RAFFINAGE DE LA METHODE**.*

Au lieu de prendre pour $f'(x)$ le terme $(x-\beta)\, f''(\beta)$, développons $\frac{1}{f'(x)}$ suivant les puissances de $(x-\beta)$, ce qui donne :

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(x-\beta)\, f''(\beta) + \frac{(x-\beta)^2}{2} f'''(\beta) + \frac{(x-\beta)^3}{6} f''''(\beta) + \ldots}$$

$$= \frac{1}{(x-\beta)\, f''(\beta)} \left[1 + (x-\beta)\, \frac{f'''(\beta)}{2\, f''(\beta)} + (x-\beta)^2\, \frac{f''''(\beta)}{6\, f''(\beta)} + \ldots\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{(x-\beta)\, f''(\beta)} - \frac{f'''(\beta)}{2\, f''^2(\beta)} - \frac{2\, f''(\beta)\, f''''(\beta) - 3\, f'''^2(\beta)}{12\, f''^2(\beta)} (x-\beta) + \ldots$$

d'où l'expression approchée de l'itération de Newton-Raphson :

$$x - \frac{f(x)}{(x-\beta)\, f''(\beta)} + \frac{f'''(\beta)}{2\, f''^2(\beta)} - \frac{2\, f''(\beta)\, f''''(\beta) - 3\, f'''^2(\beta)}{12\, f''^2(\beta)} (x-\beta)\, f(x) + \ldots$$

On n'a pas intérêt à prendre trop de termes dans le développement de $\frac{1}{f'(x)}$ car le calcul sera allongé d'autant, et on perd le bénéfice de la simplicité.

Si l'on prend :

4.(2) $$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{(x-\beta)\, f''(\beta)} + \frac{f'''(\beta)}{2\, f''^2(\beta)} f(x)$$

on aura - exception faite du calcul du facteur constant $\frac{f'''(\beta)}{2\, f''^2(\beta)}$ - un calcul aussi rapide que pour l'itération 4.(1), et la convergence sera toujours comparable à celle de Newton-Raphson, mais en général, un peu plus rapide que celle de l'itération 4.(1).

Pour l'itération 4.(2) nous avons :

$$\phi'(a) = 1 - \frac{f'(a)}{(a-\beta)\, f''(\beta)} + \frac{f'''(\beta)}{2\, f''^2(\beta)} f''(a)$$

$$\phi'(a) = 1 - \frac{(a-\beta)\, f''(\beta) + (a-\beta)^2 \frac{f'''(\beta)}{2} + (a-\beta)^3 \frac{f''''(\beta)}{6} + \ldots}{(a-\beta)\, f''(\beta)}$$

$$+ \frac{f'''(\beta)}{2\, f''^2(\beta)} \left[(a-\beta)\, f''(\beta) + (a-\beta)^2 \frac{f'''(\beta)}{2} + (a-\beta)^3 \frac{f''''(\beta)}{6} + \ldots \right]$$

$$= (a-\beta) \left[- \frac{f'''(\beta)}{2\, f''(\beta)} + \frac{f'''(\beta)}{2\, f''(\beta)} \right] - (a-\beta)^2 \left[\frac{f''''(\beta)}{6\, f''(\beta)} - \frac{f'''^2(\beta)}{4\, f''^2(\beta)} \right] + \ldots$$

$$= - \frac{(a-\beta)^2}{12} \left[\frac{2\, f''(\beta)\, f''''(\beta) - 3\, f'''^2(\beta)}{f''^2(\beta)} \right] + \ldots$$

Si donc $2\, f''(\beta)\, f''''(\beta) - 3\, f'''^2(\beta) > 0$ l'itération 4.(2) est enveloppante pour les deux racines (car le terme suivant en $(a-\beta)^3$ est, en général, plus petit que le terme en $(a-\beta)^2$).

EN RESUME :

Dès que l'on a localisé deux racines très voisines a et a* (a < a*) on calcule la (ou une) racine β de la dérivée comprise entre a et a* et on examine :

$$\frac{f'''(\beta)}{f''(\beta)}$$

Si ce rapport est positif, l'itération 4.(1) :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{(x-\beta)\, f''(\beta)}$$

est enveloppante pour a* et monotone pour a (conclusion inverse si $\frac{f'''(\beta)}{f''(\beta)} < 0$).

On a intérêt à calculer la racine a* par l'itération 4.(1) et pour la racine a on peut prendre l'itération 4.(2) :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{(x-\beta)\, f''(\beta)} + \frac{f'''(\beta)}{2\, f''^2(\beta)}\, f(x)$$

Si en plus $2\, f''(\beta)\, f''''(\beta) - 3\, f''^2(\beta)$ est positif, on peut se servir de l'itération 4.(2) pour calculer les deux racines car on aura une itération enveloppante pour l'une comme pour l'autre.

EXEMPLE :

$$f(x) = e^x - x - 1{,}000\ 2$$

On a immédiatement :

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f''(x) = f'''(x) = \ldots = e^x$$

Ici :

$$\beta = 0 \qquad \frac{f'''(\beta)}{f''(\beta)} = 1 > 0$$

L'itération :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{(x-\beta)\ f''(\beta)} = x - \frac{f(x)}{x}$$

est enveloppante pour la racine positive,
et monotone pour la racine négative.

Comme :

$$2\, f''(\beta)\, f''''(\beta) - 3\, f'''^2(\beta) = 2 - 3 = -1 < 0$$

l'itération 4.(2) est monotone pour les deux racines.

On calculera la racine positive par :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{x}$$

et la racine négative par :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{2} f(x)$$

Les valeurs de départ α_1 et α_1^* seront respectivement :

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_1^*\end{matrix}\right\rangle = \pm \sqrt{-2\,\frac{f(o)}{f''(o)}} = \pm\, 0{,}02$$

Les calculs sont résumés dans les tableaux des pages suivantes.
On obtient :

$$a = 0{,}019\ 933\ 555$$

$$a^* = -\ 0{,}020\ 066\ 889$$

Calcul de a par $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{x}$

i	α_i	$f(\alpha_i)$	$f(\alpha_i)\ \alpha_i$	α_{i+1}
1	0,02	1,340 028 756 10^{-8}	8,700 186 76 10^{-5}	0,019 932 998 88
2	0,019 932 998 88	-1,119 336 9 10^{-8}	-5,815 498 7 10^{-7}	0,019 933 580 55
3	0,019 933 580 55	0,112 472 10^{-9}	5,842 328 4 10^{-8}	0,019 933 504 126 72
4	0,019 933 504 126 72	-1,023 528 10^{-9}	-5,134 712 10^{-8}	0,019 933 555 473 84
5	0,019 933 555 473 84	1,027 053 10^{-11}	5,152 384 10^{-10}	0,019 933 554 958 80
6	0,019 933 554 958 80	-0,103 080 10^{-12}		

Calcul de a* par $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{x}$

i	α_i^*	$f(\alpha_i^*)$	$f(\alpha_i^*)\ \alpha_i^*$	α_{i+1}^*
1	-0,02	-1,328 893 244 10^{-8}	8,833 466 2 10^{-5}	-0,020 088 334 88
2	-0,020 088 334 88	-1,102 244 059 10^{-8}	5,488 001 475 10^{-7}	-0,020 088 883 980 15
3	-0,020 088 883 980 15	-1,097 180 10^{-10}	5,487 518 10^{-9}	-0,020 088 889 427 67
4	-0,020 088 889 427 67	-1,168 8 10^{-12}	5,824 520 10^{-11}	-0,020 088 889 485 91

Calcul de a par $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{2} f(x)$

i	α_i	$f(\alpha_i)$	$f(\alpha_i)/\alpha_i$	α_{i+1}
1	0,02	1,340 026 756 10^{-6}	6,700 133 78 10^{-5}	0,019 933 868 67
2	0,019 933 868 67	2,289 318 10^{-9}	1,148 468 10^{-7}	0,019 933 554 987 95
3	0,019 933 554 987 85	8,3 10^{-14}	4,164 10^{-12}	0,019 933 554 983 75
4	0,019 933 554 983 75			

Calcul de a* par $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{2} f(x)$

i	α_i^*	$f(\alpha_i^*)$	$f(\alpha_i^*)/\alpha_i^*$	α_{i+1}^*
1	-0,02	-1,326 893 244 10^{-6}	6,633 466 2 10^{-5}	-0,020 066 998 01
2	-0,020 066 998 01	2,156 115 10^{-9}	-0,107 445 8 10^{-6}	-0,020 066 889 486 10
3	-0,020 066 889 486 10	7,737 10^{-14}	-3,855 10^{-12}	-0,020 066 889 482 21
4	-0,020 066 889 482 21			

4.7. – CAS DE q RACINES TRES VOISINES.

Pour éviter les complications d'écriture, je me borne au cas q = 3. Le cas général se traite de façon analogue.

Soit β la (ou une) racine de f"(x) = 0 située dans l'intervalle I contenant les trois racines a , a* et a**.

On a :

$$f(x) = f(\beta) + (x-\beta)\, f'(\beta) + \frac{(x-\beta)^3}{6} f'''(\beta) + \ldots = 0$$

On résoud approximativement l'équation :

$$f(\beta) + \xi\, f'(\beta) + \frac{1}{6}\xi^3 f'''(\beta) = 0 \qquad (\xi = x-\beta)$$

de la façon suivante :

$$\text{lère racine} : \quad \xi_1 = -\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

Les deux autres ξ_2 et ξ_3 sont données par :

$$\begin{cases} \xi_2 \cdot \xi_3 = -6\,\dfrac{f(\beta)}{f'''(\beta)} \times \dfrac{f'(\beta)}{f(\beta)} = -6\,\dfrac{f'(\beta)}{f'''(\beta)} \\ \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\xi_2 = -\xi_3 = \pm\sqrt{-6\,\frac{f'(\beta)}{f'''(\beta)}}$$

Les trois valeurs approchées α_1 , α_1^* , α_1^{**} sont finalement :

$$\alpha_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1^* \\ \alpha_1^{**}\end{matrix}\right\} = \beta \pm \sqrt{-6\,\frac{f'(\beta)}{f'''(\beta)}}$$

Comme dans le cas de deux racines très voisines, je peux écrire :

$$f'(x) = f'(\beta) + \frac{(x-\beta)^2}{2} f'''(\beta) + \ldots$$

L'itération de Newton-Raphson devient :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(\beta) + \frac{(x-\beta)^2}{2} f'''(\beta) + \frac{(x-\beta)^3}{6} f''''(\beta) + \ldots}$$

Nous devons distinguer deux cas :

a) $f'(\beta)$ ***est grand par rapport à*** $\frac{(x-\beta)^2}{2} f'''(\beta)$ alors on peut écrire :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(\beta)} \left[1 + \frac{(x-\beta)^2}{2} \frac{f'''(\beta)}{f'(\beta)} + \frac{(x-\beta)^3}{6} \frac{f''''(\beta)}{f'(\beta)} + \ldots\right]^{-1}$$

$$= x - \frac{f(x)}{f'(\beta)} \left[1 - \frac{(x-\beta)^2}{2} \frac{f'''(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{(x-\beta)^3}{6} \frac{f''''(\beta)}{f'(\beta)} - \ldots\right]$$

$$= x - \frac{f(x)}{f'(\beta)} + \frac{(x-\beta)^2}{2} \frac{f'''(\beta)}{f'^2(\beta)} f(x) + \ldots$$

En s'en tenant à :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(\beta)} + (x-\beta)^2 \frac{f'''(\beta)}{2\, f'^2(\beta)} f(x)$$

on a une itération du premier ordre, dont la convergence est comparable à celle de Newton-Raphson :

$$\phi'(a) = 1 - \frac{f'(a)}{f'(\beta)} + (a-\beta)^2 \frac{f'''(\beta)}{2\, f'^2(\beta)} f'(a)$$

$$= 1 - \frac{f'(\beta) + \frac{(a-\beta)^2}{2} f'''(\beta) + \frac{(a-\beta)^3}{6} f''''(\beta) + \ldots}{f'(\beta)}$$

$$+ (a-\beta)^2 \frac{f'''(\beta)}{2\, f'^2(\beta)} + \left[f'(\beta) + \frac{(a-\beta)^2}{2} f'''(\beta) + \ldots\right]$$

$$= - \frac{(a-\beta)^3}{6} \frac{f''''(\beta)}{f'(\beta)} + (a-\beta)^4 \left[\frac{f'''^2(\beta)}{4\, f'^2(\beta)} - \frac{f^{(5)}(\beta)}{24\, f'(\beta)}\right] + \ldots$$

L'expression de $\phi'(a)$ montre que l'itération est enveloppante pour l'une au moins des trois racines.

b) $f'(\beta)$ et $\frac{(x-\beta)^2}{2} f'''(\beta)$ ***sont du même ordre de grandeur.***

Le développement ci-dessus n'est plus valable et tout **ce** qu'on peut faire, c'est négliger des termes dans le dénominateur de $\phi(x)$ et écrire :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(\beta) + \frac{(x-\beta)^2}{2} f'''(\beta)}$$

Dans ce cas, le calcul de $\phi'(a)$ ne permet pas de préciser si l'itération est enveloppante ou monotone.

EXEMPLE I :

Calculer les racines de l'équation :

$$f(x) = \sin x - 0{,}999\,999\,x - 0{,}9 \cdot 10^{-9} = 0$$

On obtient immédiatement :

$$f'(x) = \cos x - 0{,}999\,999$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad \text{d'où} \quad \beta = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x$$

et par suite :

$$f(\beta) = -0{,}9 \cdot 10^{-9}$$
$$f'(\beta) = 10^{-8}$$
$$f'''(\beta) = -1$$

Les trois valeurs de départ seront les suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 10^{-3} \\ \alpha_1^* = \\ \alpha_1^{**} = \end{cases} \Big\rangle \pm \sqrt{6} \cdot 10^{-3}$$

Il est facile de vérifier que pour ces trois valeurs les quantités :

$$f'(\beta) \qquad \text{et} \qquad \frac{(x-\beta)^2}{2} f'''(\beta)$$

sont du même ordre de grandeur et nous emploierons la formule du § *b)* .

Les calculs sont résumés dans les tableaux suivants. Les trois racines sont :

$$a = 0{,}001\,160\,454\,768$$
$$a^* = -0{,}002\,814\,060\,309$$
$$a^{**} = 0{,}001\,653\,603\,541$$

Calcul de a, a*, a** par $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(\beta) + \dfrac{x^2}{2} f'''(\beta)} = x - \dfrac{f(x)}{\psi(x)}$

i	α_i	$f(\alpha_i)$	$\psi(\alpha_i)$	f / ψ	α_{i+1}
1	0,001	$-0,087 \quad 10^{-9}$	$0,5 \quad 10^{-6}$	$-0,134 \quad 10^{-3}$	0,001 134
2	0,001 134	$-0,045\,684 \quad 10^{-12}$	$0,357\,022 \quad 10^{-6}$	$-2,533\,36 \quad 10^{-5}$	0,001 159 334
3	0,001 159 334	$-0,387\,506 \quad 10^{-12}$	$0,327\,972\,338 \quad 10^{-6}$	$-1,120\,540 \quad 10^{-6}$	0,001 160 454 540
4	0,001 160 454 540	$-0,728 \quad 10^{-15}$	$0,326\,672\,830 \quad 10^{-6}$	$-2,228\,531 \quad 10^{-9}$	0,001 160 456 768

i	α_i^*	$f(\alpha_i^*)$	$\psi(\alpha_i^*)$	f / ψ	α_{i+1}^*
1	-0,002 449	$-0,900\,979 \quad 10^{-9}$	$-1,998\,800 \quad 10^{-6}$	$0,451 \quad 10^{-3}$	-0,002 900
2	-0,002 900	$0,284\,833 \quad 10^{-9}$	$-3,205\,000 \quad 10^{-6}$	$-0,082\,631 \quad 10^{-3}$	-0,002 817 369
3	-0,002 817 369	$9,807\,374 \quad 10^{-12}$	$-2,988\,784\,041 \quad 10^{-6}$	$-3,303\,499 \quad 10^{-6}$	-0,002 814 065 501
4	-0,002 814 065 501	$1,538\,7 \quad 10^{-14}$	$-2,959\,482\,321 \quad 10^{-6}$	$-5,192\,482 \quad 10^{-9}$	-0,002 814 060 309

i	α_i^{**}	$f(\alpha_i^{**})$	$\psi(\alpha_i^{**})$	f / ψ	α_{i+1}^{**}
1	0,002 449	$-0,899\,021 \quad 10^{-9}$	$-2,122\,500 \quad 10^{-6}$	$0,424 \quad 10^{-3}$	0,002 025
2	0,002 025	$-0,258\,981 \quad 10^{-9}$	$-1,050\,312 \quad 10^{-6}$	$0,247 \quad 10^{-3}$	0,001 776
3	0,001 776	$-5,763\,610 \quad 10^{-11}$	$-0,577\,088 \quad 10^{-6}$	$9,987\,4 \quad 10^{-5}$	0,001 676 128
4	0,001 676 128	$-8,691\,608 \quad 10^{-12}$	$-0,404\,899\,183 \quad 10^{-6}$	$2,147\,671 \quad 10^{-5}$	0,001 654 649 288
5	0,001 654 649 288	$-0,384\,905 \quad 10^{-12}$	$-0,388\,932\,133 \quad 10^{-6}$	$1,043\,295 \quad 10^{-6}$	0,001 653 605 993
6	0,001 653 605 993	$-0,9 \quad 10^{-15}$	$-0,387\,206\,390 \quad 10^{-6}$	$2,450\,938 \quad 10^{-9}$	0,001 653 603 542

EXEMPLE II :

Si je considère l'équation :

$$f(x) = \sin x - 0{,}999\ 4\ x + 0{,}000\ 001 = 0$$

La racine β de $f''(x) = 0$ est toujours 0 et l'on a :

$$f(\beta) = 10^{-6}$$
$$f'(\beta) = 6 \cdot 10^{-4}$$
$$f'''(\beta) = -1$$

Les trois valeurs de départ seront dans ce cas :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{6}\ 10^{-2} \\ \alpha_1^* = \\ \alpha_1^{**} = \end{cases} \pm\ 6\ 10^{-2}$$

$\frac{(\alpha_1 - \beta)^2}{2} f'''(\beta) = -1{,}388 \cdot 10^{-6}$ qui est très petit par rapport à $f'(\beta)$.

Pour le calcul de la racine a à partir de la valeur α_1, on peut utiliser la formule du § *a)* .

Mais pour les deux autres valeurs de départ, il est facile de vérifier que :

$$f'(\beta) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(x-\beta)^2 f'''(\beta)$$

sont du même ordre de grandeur ; il faudra utiliser la formule du § *b)* .

Les calculs sont résumés dans les tableaux des pages suivantes, et l'on obtient :

$$a = -0{,}001\ 667\ 955\ 661$$
$$a^* = 0{,}060\ 822\ 138\ 109$$
$$a^{**} = -0{,}059\ 153\ 882\ 338$$

Calcul de a par $\phi(x) = x - \frac{10^4}{6} f(x) - \frac{10^8}{72} x^2 f(x)$

i	1	2	3
α_i	-0,001 666 666 667	-0,001 667 956 312	-0,001 667 955 660
$f(\alpha_i)$	7,72 10^{-10}	-3,90 10^{-13}	5,91 10^{-16}
$\frac{10^4}{6} f(\alpha_i)$	1,288 667 10^{-6}	-6,500 10^{-10}	9,85 10^{-13}
$\frac{10^8}{72} \alpha_i^2 f(\alpha_i)$	2,978 395 10^{-9}	-1,507 10^{-12}	2,284 10^{-15}
α_{i+1}	-0,001 667 956 312	-0,001 667 955 660	-0,001 667 955 661

Calcul de a par $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(\beta) + \frac{x^2}{2} f'''(\beta)} = x - \frac{f(x)}{\psi(x)}$

i	1	2	3
α_i	-0,001 666 666 667	-0,001 667 956 319	-0,001 667 955 661
$f(\alpha_i)$	7,72 10^{-10}	-3,94 10^{-13}	9,3 10^{-17}
$\psi(\alpha_i)$	5,988 111 111 10^{-4}	5,988 089 609 10^{-4}	5,988 089 619 10^{-4}
f / ψ	1,289 652 10^{-6}	-6,581 93 10^{-10}	1,553 602 10^{-13}
α_{i+1}	-0,001 667 956 319	-0,001 667 955 661	-0,001 667 955 661

Calcul de a* et a** par $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(\beta) + \dfrac{x^2}{2} f'''(\beta)} = x - \dfrac{f(x)}{\psi(x)}$

i	α_i^*	$f(\alpha_i^*)$	$\psi(\alpha_i^*)$	f / ψ	α_{i+1}^*
1	0,06	1,008 480 10^{-8}	- 1,2 10^{-3}	- 8,387 333 333 10^{-4}	0,060 838 733 333
2	0,060 838 733 333	- 2,073 341 10^{-8}	- 1,250 675 738 10^{-3}	1,657 856 629 10^{-5}	0,060 822 154 767
3	0,060 822 154 767	- 2,079 282 10^{-11}	- 1,249 867 255 10^{-3}	1,663 852 10^{-8}	0,060 822 213
4	0,060 822 138 129	- 2,510 10^{-14}	- 1,249 868 243 10^{-3}	2,008 10^{-11}	0,060 822 138 129

i	α_i^{**}	$f(\alpha_i^{**})$	$\psi(\alpha_i^{**})$	f / ψ	α_{i+1}^{**}
1	- 0,06	9,935 2 10^{-7}	- 1,2 10^{-3}	- 8,279 333 333 10^{-4}	- 0,059 172 066 667
2	- 0,059 172 066 667	2,090 454 10^{-8}	- 1,150 668 737 10^{-3}	- 1,816 732 797 10^{-5}	- 0,059 153 899 342
3	- 0,059 153 899 342	1,953 670 10^{-11}	- 1,149 591 904 10^{-3}	- 1,699 447 10^{-8}	- 0,059 153 882 348
4	- 0,059 153 882 348	1,137 10^{-14}	- 1,149 590 898 10^{-3}	- 0,990 10^{-12}	- 0,059 153 882 338

4.8. - *METHODE D'AGRANDISSEMENT DES RACINES.*

Je considère maintenant une équation $f(x) = 0$ admettant q racines très voisines dans un intervalle I de longueur ε .

$f'(x)$ admet q-1 racines dans I

$f''(x)$ admet q-2 racines dans I

$f^{(q-1)}(x)$ admet 1 racine dans I

En supposant la continuité des fonctions $f(x), f'(x), \ldots, f^{(q-1)}(x)$ dans I, toutes les quantités $f(x), f'(x), \ldots, f^{(q-1)}(x)$ restent petites quand x varie dans I .

THEOREME :

Si $f(x) = 0$ *admet* q *racines dans un intervalle* I *de longueur* ε, *si* $|f^{(q)}(x)| < M$ *pour* $x \in I$ *et si* β *désigne une racine de* $f^{(q-1)}(x)$ *appartenant à l'intervalle* I, *alors :*

$$|f(\beta)| < \frac{M}{8}\varepsilon^q \quad ; \quad |f'(\beta)| < \frac{M}{8}\varepsilon^{q-1} \quad ; \ldots ; \quad |f^{(q-2)}(\beta)| < \frac{M}{8}\varepsilon^2$$

DEMONSTRATION :

Par hypothèse, $f^{(q-2)}(x)$ s'annule en deux points encadrant β dans I . Un de ces points diffère de β de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$; si x désigne ce point :

$$0 = f^{(q-2)}(x) = f^{(q-2)}(\beta) + \frac{(x-\beta)^2}{2!} f^{(q)}(\beta_1) \qquad (\beta_1 \in I)$$

d'où :

$$|f^{(q-2)}(\beta)| < \frac{\varepsilon^2}{4.2!} M = \frac{M}{8}\varepsilon^2$$

De la même façon, $f^{(q-3)}(x)$ s'annule en trois points encadrant les deux zéros de $f^{(q-2)}(x)$. L'un de ces points au moins, diffère de β de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$; si x désigne ce point :

$$0 = f^{(q-3)}(x) = f^{(q-3)}(\beta) + \frac{(x-\beta)}{1} f^{(q-2)}(\beta) + \frac{(x-\beta)^3}{3!} f^{(q)}(\beta_2)$$

$$(\beta_2 \in I)$$

d'où :

$$|f^{(q-3)}(\beta)| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{M}{8}\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^3}{2^3\,3!}M = \frac{M}{8}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}\right]\varepsilon^3$$

$$|f^{(q-3)}(\beta)| < \frac{M}{8}\varepsilon^3$$

La proposition étant vérifiée jusqu'à $f^{(q-p+1)}(\beta)$ inclus, montrons qu'elle l'est encore pour $f^{(q-p)}(\beta)$.

En effet $f^{(q-p)}(x)$ s'annule en au moins un point qui diffère de β de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$, soit x ce point :

$$f^{(q-p)}(x) = 0 = f^{(q-p)}(\beta) + \frac{(x-\beta)}{1!}f^{(q-p+1)}(\beta) + \frac{(x-\beta)^2}{2}f^{(q-p+2)}(\beta) + ..$$

$$.. + \frac{(x-\beta)^k}{k!}f^{(q-p+k)}(\beta) + ... + \frac{(x-\beta)^p}{p!}f^{(q)}(\beta_{p-1})$$

$$(\beta_{p-1} \in I)$$

Donc :

$$|f^{(q-p)}(\beta)| < \frac{M\varepsilon^p}{8}\left[\frac{1}{1!\,2}+\frac{1}{2!\,2^2}+...+\frac{1}{k!\,2^k}+...+\frac{1}{(p-2)!\,2^{p-2}}+\frac{1}{p!\,2^k}\right]$$

Le crochet se comporte comme les p premiers termes du développement de $e^{\frac{1}{2}} - 1$ par suite, comme :

$$e^{\frac{1}{2}} - 1 < 1 \qquad (e < 4)$$

on a bien :

$$|f^{(q-p)}(\beta)| < \frac{M}{8}\varepsilon^p \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Je vais utiliser ce théorème pour obtenir une équation dont les racines ne seront pas presque confondues.

APPLICATION :

Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ posons :

$$x = \beta + \xi$$

nous obtenons facilement l'équation :

$$f(\beta) + \frac{\xi}{1!}f'(\beta) + .. + \frac{\xi^{q-2}}{(q-2)!}f^{(q-2)}(\beta) + \frac{\xi^q}{q!}f^{(q)}(\beta) + .. + \frac{\xi^n}{n!}f^{(n)}(\beta) + ... = 0$$

D'après l'hypothèse faite au début de ce paragraphe, cette équation admet q racines ξ telles que $\xi + \beta$ soit intérieur à l'intervalle I, c'est à dire telle que $|\xi| < \varepsilon$.

Si donc, je pose $\xi = \lambda\,\varepsilon$ j'aurai une équation en λ admettant q racines de module inférieur à 1 :

$$f(\beta) + \frac{\varepsilon}{1} f'(\beta)\,\lambda + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(\beta)\,\lambda^2 + \ldots + \frac{\varepsilon^{q-2}}{(q-2)!} f^{(q-2)}(\beta)\,\lambda^{q-2}$$

$$+ \frac{\varepsilon^q}{q!}\left[f^{(q)}(\beta)\lambda^q + \frac{\varepsilon}{q+1} f^{(q+1)}(\beta)\lambda^{q+1} + \ldots + \frac{\varepsilon^{n-q}}{(q+1)\ldots n} f^{(n)}(\beta)\lambda^n + \ldots \right] = 0$$

ou :

$$c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_{q-2}\lambda^{q-2}$$

$$+ \left[\frac{1}{q!} f^{(q)}(\beta)\lambda^q + \frac{\varepsilon}{(q+2)!} f^{(q+1)}(\beta)\lambda^{q+1} + \ldots + \frac{\varepsilon^{n-q}}{n!} f^{(n)}(\beta)\lambda^n + \ldots \right] = 0$$

En posant :

$$c_0 = \frac{1}{\varepsilon^q} f(\beta) \longrightarrow |c_0| < \frac{M}{8}$$

$$c_1 = \frac{1}{\varepsilon^{q-1}} \frac{f'(\beta)}{1!} \longrightarrow |c_1| < \frac{1}{1!}\frac{M}{8}$$

$$c_2 = \frac{1}{\varepsilon^{q-2}} \frac{f''(\beta)}{2!} \longrightarrow |c_2| < \frac{1}{2!}\frac{M}{8}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{q-2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{f^{(q-2)}(\beta)}{(q-2)!} \longrightarrow |c_{q-2}| < \frac{1}{(q-2)!}\frac{M}{8}$$

Montrons maintenant que si l'on considère une itération $x = \phi(x)$ d'ordre p, l'itération obtenue, une fois le changement $x = \beta + \lambda\,\varepsilon$ effectué, est encore d'ordre p et que les q racines en λ de module < 1 ne sont pas presque confondues.

$x = \phi(x)$ devient :

$$\beta + \lambda\,\varepsilon = \phi(\beta + \lambda\,\varepsilon)$$

ou :

$$\lambda = -\frac{\beta}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\phi(\beta + \lambda\,\varepsilon) = \chi(\lambda)$$

Je dis que cette itération $\chi(\lambda)$ est d'ordre p, en effet :

$$\chi^{(k)}(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon}\phi^{(k)}(\beta + \lambda\,\varepsilon) \cdot \varepsilon^{k} = \varepsilon^{k-1}\,\phi^{(k)}(\beta + \lambda\,\varepsilon)$$

Pour une racine $a_i = \beta + \lambda_i\,\varepsilon$

et :
$$\begin{cases} \phi^{(k)}(\beta + \lambda_i\,\varepsilon) = 0 & \text{si} \quad 1 \leq k \leq p-1 \\ \phi(\beta + \lambda_i\,\varepsilon) = \beta + \lambda_i\,\varepsilon \end{cases}$$

donc :
$$\begin{cases} \chi^{(k)}(\lambda_i) = 0 & \text{si} \quad 1 \leq k \leq p-1 \\ \chi(\lambda_i) = \lambda_i \end{cases}$$

donc l'itération $\lambda = \chi(\lambda)$ est bien d'ordre p .

D'autre part :

$$\chi^{(p)}(\lambda) = \varepsilon^{p-1}\,\phi^{(p)}(\beta + \lambda\,\varepsilon)$$

$$= \varepsilon^{p-1}\left\{\phi^{(p)}(\beta) + \lambda\,\varepsilon\,\phi^{(p+1)}(\beta) + \ldots\right\}$$

On a vu que $\phi^{(p)}(\beta)$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}$ donc $\chi^{(p)}(\lambda)$ n'est pas infiniment grand avec $\frac{1}{\varepsilon}$ donc $\lambda = \chi(\lambda)$ n'a pas ses racines presque égales.

EXEMPLE :

Reprenons l'exemple précédent :

$$f(x) = \sin x - 0{,}999\,999\,x - 0{,}9 \cdot 10^{-9} = 0$$

Nous avons :

$$\beta = 0$$

Posant :

$$x = \lambda \cdot 10^{-3}$$

il vient :

$$\sin(\lambda.10^{-3}) - 0{,}999\ 999\ (\lambda.10^{-3}) - 0{,}9 \cdot 10^{-9} = 0$$

ou en multipliant par 10^3 :

$$10^3 \sin(\lambda.10^{-3}) - 0{,}999\ 999\ \lambda - 0{,}9 \cdot 10^{-6} = 0$$

Développant $\sin(\lambda.10^{-3})$ il vient, après simplification par 10^{-6} et négligeant les termes à partir de $(\lambda.10^{-3})^5$:

$$g(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda + 5{,}4 = 0$$

et :

$$g'(\lambda) = 3\lambda^2 - 6$$

Je suis partie des trois valeurs approchées :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_1^* = -3 \\ \lambda_1^{**} = 2 \end{cases}$$

Les calculs sont résumés dans les tableaux suivants, et on obtient :

$$\begin{cases} \lambda = 1{,}160\ 456\ 767 \\ \lambda^* = -2{,}814\ 060\ 309 \\ \lambda^{**} = 1{,}653\ 603\ 541 \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} a = 0{,}001\ 160\ 456\ 767 \\ a^* = -0{,}002\ 814\ 060\ 309 \\ a^{**} = 0{,}001\ 653\ 603\ 541 \end{cases}$$

Calcul de λ , λ^* , λ^{**} par l'itération de Newton-Raphson

i	1	2	3	4	5
λ_i	1	1,133	1,159 255	1,160 454 215	1,160 456 787
$g(\lambda_i)$	0,4	0,056 419 637	0,002 360 515	5,003 040 10^{-6}	1,080 10^{-9}
$g'(\lambda_i)$	-3	-2,148 833	-1,988 383 535	-1,980 038 045	-1,980 020 276
g / g'	-0,133	-0,026 255	-0,001 199 215	-2,552 10^{-6}	-0,554 10^{-9}
λ_{i+1}	1,133	1,159 255	1,160 454 215	1,160 456 787	1,160 456 787

i	1	2	3	4	5
λ_i^*	-3	-2,829	-2,814 185	-2,814 080 314	-2,814 080 309
$g(\lambda_i^*)$	-3,6	-0,267 188 789	-0,001 859 078	-9,8 10^{-8}	
$g'(\lambda_i^*)$	21	18,009 723	17,758 573 940	17,736 808 352	
g / g'	-0,171	-0,014 835	-0,000 104 686	-5,519 10^{-9}	
λ_{i+1}^*	-2,829	-2,814 185	-2,814 080 314	-2,814 080 309	

i	1	2	3	4	5
λ_i^{**}	2	1,767	1,673 416	1,654 421 082	1,654 805 041
$g(\lambda_i^{**})$	1,4	0,315 084 683	0,045 808 149	0,001 804 489	3,308 10^{-6}
$g'(\lambda_i^{**})$	6	3,366 867	2,400 983 327	2,211 327 151	2,203 228 895
g / g'	0,233	0,093 584	0,018 994 938	0,000 816 021	1,500 10^{-6}
λ_{i+1}^{**}	1,767	1,673 416	1,654 421 082	1,653 805 041	1,653 803 541

CHAPITRE V

APPLICATIONS A QUELQUES POINTS DU CALCUL MATRICIEL

5.1. - *GENERALITES*.

Le calcul matriciel conduit, dans les problèmes pratiques, à des types variés de problèmes : inversion de matrice, système linéaire, valeurs propres, équations matricielles, etc...

Ces problèmes ne peuvent pas se ramener à un type d'équation de la forme $f(X) = 0$ où X représente une matrice inconnue ou un scalaire inconnu et f une "fonction" dont le calcul des valeurs pour un X donné nécessite le calcul de certaines matrices.

La notion même de fonction de matrice est très restrictive si l'on veut conserver certaines règles de l'algèbre non commutative.

On sait que les fonctions les plus simples sont déduites des séries entières. Si :

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

représente une série entière $f(z)$ à coefficients scalaires, convergente dans le cercle (O,R), la série

$$a_0 X + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots = f(X)$$

converge si les valeurs propres de X sont situées à l'intérieur du cercle (O,R).

Pour de telles fonctions qui sont commutables entre elles, on définit la dérivée :

$$\frac{d}{dX} f(X) = \lim_{h=o} \frac{f(X + h\ I) - f(X)}{h}$$

et on montre immédiatement que les règles ordinaires de la dérivation des séries entières s'appliquent.

Donc, en particulier, on peut écrire la formule de Taylor :

$$f(X + h\ I) = f(X) + \frac{h}{1} f'(X) + \ldots$$

Mais, dans les calculs d'itération où, connaissant une première valeur approchée X_0 d'une matrice inconnue X, on veut déterminer une seconde approximation X_1, $X-X_0$, $X-X_1$ ne sont pas de la forme diagonale et un développement de la forme :

$$f(X_0 + \delta X_0) = f(X_0) + \delta X_0\ f'(X_0) \ldots$$

n'a, en général, pas de sens.

La théorie générale de l'itération, valable pour les équations scalaires, n'a pas d'équivalent dans le domaine matriciel.

Je me borne à un point particulier qui peut comporter quelques applications intéressantes dans la pratique :

Soit à résoudre l'équation matricielle :

$$f(X) = 0$$

où f(X) est une série entière à coefficients scalaires par rapport à la matrice X .

Connaissant une valeur approchée X_0 de la solution cherchée, on se propose de construire une itération d'ordre p pour déterminer la matrice X.

Je démontre les théorèmes suivants :

THEOREME I :

Soit la série itérative scalaire :

5.(1) $$I(z) = z + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{G_N(z)}{N!} F^N(z)$$

absolument et uniformément convergente pour tout z appartenant à un domaine D . *Les* $G_N(z)$ *et* $F(z)$ *étant supposées holomorphes dans* D, *s'il existe une*

matrice X_1 *telle que la série matricielle :*

5.(2) $$I(X_1)$$

converge (vers une valeur X_0*),* $I(X)$ *converge vers* X_0 *pourvu que les racines caractéristiques de* $X-X_0$ *soient moindres en module qu'un certain nombre positif* R *, et l'on a :*

$$F(X_0) = 0$$

DEMONSTRATION :

Soit :

$$z_0 = I(z)_{..}$$

L'hypothèse de l'holomorphie des fonctions $G_N(z)$ et $F(z)$ ainsi que l'hypothèse de la convergence absolue et uniforme de la série $I(z)$ permettent de développer $I(z)$ autour de $z = z_0$:

$$I(z) = z + \sum_{p=1}^{\infty} a_p (z - z_0)^p \equiv z_0$$

d'où :

$$a_1 = -1 \quad a_2 = a_3 = \ldots = a_p = \ldots = 0$$

Par suite si $X - X_0$ a ses racines caractéristiques moindres en module que le rayon du cercle de convergence des séries :

5.(3)
$$\begin{cases} G_N(z) = \sum_{p=o}^{\infty} g_{N,p}(z - z_0)^p \\ F(z) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p(z - z_0)^p \end{cases}$$

on sait que les séries :

5.(4)
$$\begin{cases} G_N(X) = \sum_{p=o}^{\infty} g_{N,p}(X - X_0)^p \\ F(X) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p(X - X_0)^p \end{cases}$$

convergent, et on a le droit de faire la substitution des séries 5.(4) dans 5.(1) et on obtient :

$$I(X) = X + \sum_{p=1}^{\infty} a_p (X - X_0)^p \equiv X_0$$

Comme :

$$F(z) = f_1(z - z_0) + \ldots$$

entraîne :

$$F(X) = f_1(X - X_0) + \ldots$$

on a :

$$F(X_0) = 0$$ c.q.f.d.

THEOREME II :

Dans les hypothèses du théorème I, la fonction :

$$\phi_N(X) = X + \sum_{p=1}^{N=1} \frac{G_p(X)\ F^p(X)}{p!}$$

constitue une itération d'ordre N par rapport à la matrice X_0, c'est à dire que :

a) la suite :

$$X_2 = \phi_N(X_1) \ , \ldots , \ X_{q+1} = \phi_N(X_q) \ \ldots$$

converge vers X_0 pourvu que X_1 soit suffisamment voisin de X_0 .

b) si l'on suppose que les éléments de $X_1 - X_0$ sont moindres en module que ε , les éléments de $\phi_N(X_1) - X_0$ sont moindres en module que ε^N .

DEMONSTRATION :

Puisque :

$$X_0 = I(X_1) = \phi_N(X_1) + R_N(X_1)$$

avec :

$$R_N(X_1) = \sum_{p=N}^{+\infty} \frac{G_p(X_1)\ F^p(X_1)}{p!}$$

on a :

$$\phi_N(X_1) - X_0 = \phi_N(X_1) - \left[\phi_N(X_1) + R_N(X_1)\right] = - R_N(X_1)$$

$$= \sum_{p=N}^{+\infty} \frac{G_p(X_1)\ F^p(X_1)}{p!}$$

Comme $F(X_1) = f\ (X_1 - X_0) + \ldots$ et que les éléments de $\frac{1}{p!} G_p(X_1)$ sont bornés, les éléments de $\phi_N(X_1) - X_0$ sont moindres que :

$$0(1)\ \varepsilon^N$$

5.2. - *APPLICATION I* - *INVERSE D'UNE MATRICE A*.

Pour l'inverse d'un nombre a on a la série itérative suivante : (Cf. chapitre II, § A)

$$z\left[1 + (1 - az) + (1 - az)^2 + \ldots + (1 - az)^{N-1} + \ldots\right]$$

donc la fonction :

$$\phi_N(X) = X\left[I + (I - AX) + (I - AX)^2 + \ldots + (I - AX)^{N-1}\right]$$

donne une itération d'ordre N pour calculer l'inverse d'une matrice A si l'on connait une matrice X telle que les racines caractéristiques de (I-AX) soient moindres en module que 1 . (En réalité ici , pour appliquer les théorèmes I et II , il convient de considérer AX comme la variable car les fonctions G_N et F doivent être des séries entières à coefficients scalaires par rapport à la variable matricielle).

La série :

$$u\left[1 + (1 - u) + (1 - u)^2 + \ldots\right]$$

a pour somme 1 , donc :

$$A\,\phi_N(U) = U\left[I + (I - U) + \ldots + (I - U)^N\right]$$

tend vers I quand N augmente indéfiniment.

En prenant N = 2 :

$$\phi_2(X) = X\left[I + (I - AX)\right] = X\,(2\,I - AX)$$

on retrouve l'itération quadratique bien connue.

5.3. - *APPLICATION II*. - *EQUATION LINEAIRE* $Ax - v = 0$.

Les méthodes d'itération pour résoudre un système linéaire sont toutes des méthodes du premier ordre. Les plus simples – itération diagonale et itération de Gauss-Seidel – ne convergent que si les éléments diagonaux prédominent.

Les méthodes qui convergent toujours sont des méthodes indirectes – méthode de normalisation de Seidel, méthodes de Kacmarz et de Cimmino, etc ..

Dans cet ordre d'idée, on peut songer à calculer A^{-1} par une itération d'ordre quelconque (les longueurs résident surtout dans la recherche d'une valeur approchée de A^{-1} pour que l'itération converge), puis on calculera $A^{-1}v$.

Il est également possible de considérer x comme la première colonne de l'inverse d'une matrice M et appliquer les méthodes d'itération pour calculer M. En supposant que la première composante de v ne soit pas nulle, on pose :

$$A X = V = (V_1\ V_2\ \ldots\ V_n) \quad , \quad X \text{ étant une } (n\text{-}n)\text{-matrice}$$

où :

$$V_1 = v = (v^1,\ v^2\ ,\ldots,\ v^n)'$$

et où toutes les composantes de V_i sont nulles, sauf la i-ième qui est égale à 1 (pour i = 2, 3,,..., n)

L'inverse de la matrice V est :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^1} & & & & \\ -\frac{v^2}{v^1} & 1 & & & \\ -\frac{v^3}{v^1} & & 1 & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \\ -\frac{v^n}{v^1} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

La première colonne de X est naturellement la solution cherchée et :

$$V^{-1} A X - I = 0$$

Dès que l'on a déterminé une valeur approchée de $A^{-1}v = M$, on applique la méthode d'itération ordinaire pour le calcul de l'inverse de M.

REMARQUE :

Si l'on connait une valeur approchée B de A^{-1}, il est possible d'employer une itération du premier ordre :

$$\phi(x) = x - B\,(A\,x - v)$$

où x désigne le vecteur inconnu. On a :

$$\phi(x) - A^{-1}v = x - A^{-1}v - B\,A(x - A^{-1}v)$$

$$= (I - B\,A)(x - A^{-1}v)$$

En partant de x_0 on aura successivement :

$$x_1 - A^{-1}v = (I - B\,A)\ (x_0 - A^{-1}v)$$

$$x_2 - A^{-1}v = (I - B\,A)^2\ (x_0 - A^{-1}v)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_N - A^{-1}v = (I - B\,A)^N\ (x_0 - A^{-1}v)$$

La convergence est du premier ordre si et seulement si les racines caractéristiques de $I - B\,A$ sont toutes moindres que 1 en module.

On voit immédiatement que la borne des modules des éléments de :

$$(I - B\,A)\ (x_0 - A^{-1}v)$$

est moindre que la borne des modules de $(x_0 - A^{-1}v)$ si la somme des modules des éléments de chaque ligne de :

$$C = I - B\,A$$

est moindre que 1 .

En prenant pour B la matrice :

$$B = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_1^1}\ ,\ \frac{1}{a_2^2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{a_n^n} \right) = D^{-1}$$

en désignant par D la diagonale de A , on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \left| c_i^k \right| = \sum{}' \frac{\left| a_k^i \right|}{\left| a_i^i \right|}$$

où $\sum'$ désigne la somme pour tous les $k \neq i$.

Par suite, la condition $\sum_{k=1}^{n} \left| c_k^i \right| < 1$ se traduit par :

$$\sum_{k}{}' \left| a_k^i \right| < \left| a_i^i \right|$$

on retrouve la condition de Collatz, et l'itération correspondante :

$$\phi(x) = x - D^{-1}\left[(D + F)\ x - v \right] \qquad (A = D + F)$$

ou :

$$D\ x_{N+1} = - F\ x_n + v$$

qui n'est autre que l'itération diagonale.

5.4. - *APPLICATION III.* - *PROBLEME DES VALEURS PROPRES.*

Les méthodes d'itération directes connues pour la détermination des valeurs propres sont des méthodes du premier ordre. Elles sont quelquefois inapplicables même pour un calculateur électronique. Les méthodes indirectes, basées sur la formation du polynôme caractéristique (Leverrier, Hessenberg, Lanczos, Givens, etc...) ont l'inconvénient essentiel de ne conduire au polynôme caractéristique qu'après de nombreux calculs, pendant lesquels les erreurs peuvent s'accumuler.

La méthode que je propose ici, conduit à une équation caractéristique qui est immédiate à former et qui, comme toute équation algébrique, peut se résoudre par la méthode d'itération d'ordre quelconque. Pour la simplicité du calcul, cependant, il semble qu'il faille se limiter au second ordre.

Supposons la matrice $A = (a^i_j)$ écrite sous la forme d'une matrice généralisée :

$$A = \begin{pmatrix} a & w \\ v & B \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a = a^1_1$$

Si λ désigne une valeur propre et $(x^1, x^2, \ldots, x^n)' = (x,X)'$ le vecteur propre correspondant (X est un vecteur d'un espace à n-1 dimensions), on a immédiatement :

$$A(x,X)' = \lambda(x,X)'$$

ou :

$$5.(5) \qquad \begin{cases} (\lambda - a)\, x - w\, X = 0 \\ -\, v\, x + (\lambda\, I - B)\, X = 0 \end{cases}$$

DISCUSSION DU SYSTEME 5.(5) :

Premier Cas : *λ n'est pas une racine caractéristique de* B.

De la seconde équation 5.(5) on tire :

$$X = (\lambda\, I - B)^{-1}\, v\, x$$

et en portant dans la première équation :

$$\left[\lambda - a - w\,(\lambda\, I - B)^{-1}\, v\right] x = 0$$

Mais $\Delta(\lambda\, I - B) \neq 0$ exige $x \neq 0$ sans quoi la seconde équation 5.(5) donnerait $X = 0$ ce qui est absurde ; par suite :

$$5.(6) \qquad f(\lambda) = \lambda - a - w\,(\lambda\, I - B)^{-1}\, v = 0$$

On vérifie sans peine que :

$$\Delta(\lambda\, I - B)\, f(\lambda) = (\lambda - a)\, \Delta(\lambda\, I - B) - w\ \mathrm{adj}.(\lambda\, I - B)\, v$$

n'est autre que le polynôme caractéristique de A .

L'équation 5.(6) peut se résoudre par les méthodes normales d'itération, par exemple au moyen de l'itération de Newton-Raphson :

$$5.(7) \qquad \phi(\lambda) = \lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$$

avec :

$$f'(\lambda) = 1 + w\,(\lambda\, I - B)^{-2}\, v$$

Deuxième Cas : λ *est aussi racine caractéristique de* B.

La seconde équation 5.(5) exige :

$$r\,[\lambda\, I - B] = r\,[v\, x\ ,\ \lambda\, I - B]$$

où $r[M]$ désigne le rang de la matrice M .

De deux choses l'une :

- ou $x = 0$ et la compatibilité du système 5.(5) exige :

$$r\,[\lambda\, I - B] = r \begin{bmatrix} w \\ \lambda\, I - B \end{bmatrix} \leq n - 2$$

- ou $x \neq 0$ et :

$$r\,[\lambda\, I - B] = r\,[v\ ,\ \lambda\, I - B]$$

car on peut prendre $x = 1$.

Pratiquement, si l'on veut explorer les racines caractéristiques communes aux matrices A et B , on commence par déterminer une racine caractéristique λ_o de B et on vérifie si l'une des deux conditions :

$$r\,[\lambda_o\, I - B] = r \begin{bmatrix} w \\ \lambda_o\, I - B \end{bmatrix}$$

ou :

$$r\left[\lambda_o I - B\right] \quad = \quad r\left[v\ ,\ \lambda_o I - B\right]$$

est réalisée. Dans l'affirmative, on résoud le système 5.(5) en x,X . Si ce système donne une solution non triviale, λ_o est une racine caractéristique de A .

RESOLUTION DE L'EQUATION 5.(6) :

Pour construire la suite des itérés donnée par :

$$\lambda_N \quad = \quad \phi(\lambda_{N-1})$$

on doit inverser la matrice $(\lambda_{N-1} I - B)$.

Si l'on part d'une valeur d'essai λ_o "suffisamment proche" de la racine λ cherchée, les calculs les plus longs concernent l'inversion de la matrice $\lambda_o I - B$.

Une fois $(\lambda_o I - B)^{-1} = C_o$ calculée, les inverses des matrices suivantes $(\lambda_o I - B)$ ... $(\lambda_N I - B)$ peuvent être obtenues par des procédés d'itération habituels.

En effet, posons $\lambda_1 = \lambda_o + \varepsilon$ on a :

$$C_1 \quad = \quad (\lambda_1 I - B)^{-1} \quad = \quad \left[(\lambda_o + \varepsilon) I - B\right]^{-1} \quad = \quad \left[\lambda_o I - B + \varepsilon I\right]^{-1}$$

$$= \quad \left[(\lambda_o I - B)\left[I + \varepsilon\ (\lambda_o I - B)^{-1}\right]\right]^{-1}$$

$$= \quad (I + \varepsilon\ C_o)^{-1}\ C_o \quad = \quad C_o - \varepsilon\ C_o^2 + \varepsilon^2\ C_o^3 - \ldots$$

La série converge pourvu que les racines caractéristiques de la matrice C_o soient moindres en module que $\frac{1}{\varepsilon}$ ce qui est réalisé si λ_1 est suffisamment proche de λ_o .

Le calcul développé plus haut ne peut s'appliquer si λ est assez proche d'une racine caractéristique de B, car alors la seconde équation du système 5.(5) est mal conditionnée. On s'en aperçoit aisément dès les premières valeurs de la suite $\phi(\lambda_N)$.

Il suffit alors pour rendre la méthode applicable, d'échanger dans A la ligne i avec la première ligne et la colonne i avec la première colonne ; la nouvelle matrice B n'aura pas, en général, de racine caractéristique voisine de λ et la résolution de l'équation 5.(6) peut se faire normalement.

Dans ce qui suit, je suppose, quitte à faire des échanges de lignes et de colonnes, que x n'est pas nul et je prendrai :

$$x = -1$$

de sorte que le vecteur caractéristique relatif à λ s'écrit :

$$(-1 , X)'$$

VECTEUR PROPRE :

Dans le calcul de la suite des itérés :

$$\lambda_0 , \lambda_1 , \ldots , \lambda_N , \lambda_{N+1} , \ldots$$

on a à évaluer :

$$(\lambda_N I - B)^{-1} v$$

Mais :

$$- (\lambda_N I - B)^{-1} v = X_N$$

Donc, le calcul de la (N+1)-ième itérée pour λ donne la N-ième itérée pour le vecteur propre.
Cette propriété donne un moyen de contrôle à chaque stade.

EXEMPLE :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & w \\ v & B \end{pmatrix}$$

Explorons les racines caractéristiques de B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

les racines caractéristiques sont 1 et 2 .

Pour $\lambda = 2$:

$$2 I - B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on vérifie aisément que :

$$r\,(2 I - B) \neq r \begin{pmatrix} w \\ 2 I - B \end{pmatrix}$$

$$r\,[2\,I - B] \neq r\,[v\ ,\ 2\,I - B]$$

donc 2 n'est pas racine caractéristique de A .

Pour $\lambda = 1$:

$$I - B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(v\ ,\ I - B) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$r\,[I - B] = r\,[v, I - B] = 1$$

$\lambda = 1$ est donc racine caractéristique de A .

Prenons $x = -1$ (x n'est pas nul)

$$[I - B]\ X = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

d'où l'on tire :

$$X = (y\ ,\ 2)'$$

et :

$$w\,X = a - \lambda$$

donne :

$$2\,y + 6 = 2$$

d'où :

$$y = -2$$

Donc :

$$\lambda^1 = 1 \quad \text{et} \quad V^1 = (-1\ ,\ -2\ ,\ 2)'$$

Nous allons calculer les autres racines au moyen de l'équation 5.(6) . Je prendrai comme valeurs de départ :

$$\lambda_o^2 = -1 \qquad \lambda_o^3 = 6$$

Calcul de λ^2

$\lambda_0^2 = -1$

$$(\lambda_0^2 I - B) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_0^2 I - B)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_0^2 I - B)^{-2} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$f(\lambda_0^2) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $f'(\lambda_0^2) = \frac{23}{9}$

$\lambda_1^2 = -1,261$ $\qquad$ $X_0^2 = (1,333 \; ; \; 0,667)'$

$\lambda_1^2 = -1,261$

$$(\lambda_1^2 I - B) = \begin{bmatrix} -2,261 & -2 \\ 0 & -3,261 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1^2 I - B)^{-1} = \frac{1}{7,373\ 221} \begin{bmatrix} -3,261 & 2 \\ 0 & -2,261 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1^2 I - B)^{-2} = \frac{1}{54,362\ 913\ 281} \begin{bmatrix} 10,634\ 121 & -11,044 \\ 0 & 5,112\ 121 \end{bmatrix}$$

$f(\lambda_1^2) = 0,032\ 103\ 380$ $\qquad$ $f'(\lambda_1^2) = 2,316\ 516\ 898$

$\lambda_2^2 = -1,274\ 858$ $\qquad$ $X_1^2 = (1,226\ 601 \; ; \; 0,613\ 300)'$

$\lambda_2^2 = -1,274\ 858$

$$(\lambda_2^2 I - B) = \begin{pmatrix} -2,274\ 858 & -2 \\ 0 & -3,274\ 858 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2^2 I - B)^{-1} = \frac{1}{7,449\ 836\ 920} \begin{pmatrix} -3,274\ 858 & 2 \\ 0 & 2,274\ 858 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2^2 I - B)^{-2} = \frac{1}{55,500\ 070\ 135} \begin{pmatrix} 10,724\ 694\ 920 & -11,099\ 432 \\ 0 & 5,174\ 978\ 920 \end{pmatrix}$$

$f(\lambda_2^2) = 0,000\ 136\ 518$ $\qquad$ $f'(\lambda_2^2) = 2,305\ 398\ 438$

$\lambda_3^2 = -1,274\ 917\ 217$ $\qquad$ $X_2^2 = (1,221\ 427\ 005\ ;\ 0,610\ 713\ 502)'$

Finalement :

$$\lambda^2 = -1,274\ 917\ 217$$

$$V^2 = (-1\ ;\ 1,221\ 404\ 919\ ;\ 0,610\ 702\ 459)'$$

Calcul de λ^3

$\lambda_0^3 = 6$

$$(\lambda_0^3 I - B) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_0^3 I - B)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_0^3 I - B)^{-2} = \frac{1}{400} \begin{pmatrix} 16 & 18 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$f(\lambda_0^3) = -0,5$ $\qquad$ $f'(\lambda_0^3) = 1,875$

$\lambda_1^3 = 6.267$ $\qquad$ $X_0^3 = (-1 \; ; \; -0,5)'$

$\lambda_1^3 = 6,267$

$$(\lambda_1^3 I - B) = \begin{pmatrix} 5,267 & -2 \\ 0 & 4,267 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1^3 I - B)^{-1} = \frac{1}{22,474\ 289} \begin{pmatrix} 4,267 & 2 \\ 0 & 5,267 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1^3 I - B)^{-2} = \frac{1}{505,093\ 666\ 0} \begin{pmatrix} 18,207\ 289 & 19,068 \\ 0 & 27,741\ 289 \end{pmatrix}$$

$f(\lambda_1^3) = -0,013\ 994$ $\qquad$ $f'(\lambda_1^3) = 1,768\ 922\ 823$

$\lambda_2^3 = 6,274\ 911$ $\qquad$ $X_1^3 = (-0,937\ 427 \; ; \; -0,468\ 713)'$

$\lambda_2^3 = 6,274\ 911$

$$(\lambda_2^3 I - B) = \begin{pmatrix} 5,274\ 911 & -2 \\ 0 & 4,274\ 911 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2^3 I - B)^{-1} = \frac{1}{22,549\ 775\ 058} \begin{pmatrix} 4,274\ 911 & 2 \\ 0 & 5,274\ 911 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2^3 I - B)^{-2} = \frac{1}{508,492\ 355\ 166} \begin{pmatrix} 18,274\ 864\ 058 & 19,099\ 644 \\ 0 & 27,824\ 686\ 058 \end{pmatrix}$$

$f(\lambda_2^3) = -0,000\ 010\ 980$ $\qquad$ $f'(\lambda_2^3) = 1,766\ 079\ 569$

$\lambda_3^3 = 6,274\ 917\ 217$ $\qquad$ $X_2^3 = (-0,935\ 691\ 994 \; ; \; -0,467\ 845\ 997)'$

Finalement :

$$\lambda^3 = 6{,}274\ 917\ 217$$

$$V^3 = (-1\ ;\ -0{,}935\ 690\ 633\ ;\ -0{,}467\ 845\ 325)'$$

REMARQUE :

La racine $\lambda = 1$ commune à $\Delta(A - \lambda I)$ et $\Delta(B - \lambda I)$ peut se calculer aussi par l'équation 5.(6) après avoir fait un échange de deux lignes et de deux colonnes.

Il suffit, dans le cas présent, d'échanger les lignes 1 et 2 et les colonnes 1 et 2 de A et de partir de la matrice :

$$A^* \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice B* admet les racines 0 et 5 qui ne sont pas racines de A .

DEFLATION :

Je suppose toujours $x = -1$ (quitte à faire des échanges de lignes et de colonnes dans A).

Les équations du système 5.(5) s'interprètent simplement en termes d'opérations élémentaires.

On multiplie les colonnes 2, 3 ,..., n de A respectivement par $-x^2$, $-x^3$,..., $-x^n$, puis on les ajoute à la première colonne. On ajoute ensuite aux lignes 2, 3,,..., n de la matrice obtenue le produit de la première respectivement par x^2, x^3 ,..., x^n : on annule ainsi les 2e, 3e ,... .., n-ième éléments de la première colonne de la dernière matrice.

La première équation du système 5.(5) (où l'on fait $x = -1$) exprime le fait que le premier élément de la première colonne est une valeur propre ; la seconde équation du système 5.(5) (où l'on fait $x = -1$) exprime le fait que les autres éléments de la première colonne sont nuls.

Il suit de là, qu'en supprimant la première ligne et la première colonne de la dernière matrice, on obtient une matrice d'ordre n-1 admettant toutes les autres racines caractéristiques de A, à l'exception de λ, cette matrice s'écrit visiblement :

$$B + X w$$

On a là, une méthode de déflation très simple, applicable évidemment, quelle que soit la méthode employée pour calculer une racine λ et son vecteur propre (ou un de ses vecteurs propres), la seule précaution à prendre est de réduire la première composante d'un tel vecteur à -1. La formation de la matrice $B + X w$ est alors immédiate.

REMARQUE :

Le point faible de la méthode décrite est qu'elle n'indique pas de quelle valeur approchée il faut partir pour que l'itération 5.(7) converge. La fonction $f(\lambda)$ étant une fraction rationnelle en λ dont le dénominateur est le déterminant $\Delta(\lambda I - B)$, une étude approfondie de l'application numérique de la méthode exige la détermination d'un point de départ rendant l'itération 5.(7) convergente.

BIBLIOGRAPHIE

AITKEN A.C.

On Bernouilli's numerical solution of algebraic equations (Proc. Royal Soc. Edinburgh, 46, 289-305, 1926)

Further numerical Studies in algebraic equations and matrices (Proc. Royal Soc. Edinburgh, 41, 80-90, 1931)

On the factorization of polynomials by iterative methods (Proc. Royal Soc. Edinburgh, 63, 174-191, 1951)

BAILEY V.A.

Prodigious Calculations (Australian J. Sci. 3, 78-80, 1941)

BAIRSTOW L.

Applied Aerodynamics (London, 1920)

BODEWIG E.

Matrix Calculus (Amsterdam, 1956)

On types of convergence and on the behavior of approximations in the neighbourhood of a multiple root of an equation (Quart. App. Math. 7, 325-333, 1949)

COLLATZ L.

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (Springer Verlag Berlin, 1955)

Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (Leipzig, 1949)

Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung (Leipzig, 1945, New-York, 1948)

DOMB C.

On iterative solutions of algebraic equations (Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 237-240, 1949)

DURAND E.

Solutions numériques des équations algébriques (Masson, Paris, 1960)

FERRAR W.L.

Finite Matrices (Clarendon Press, Oxford)

FRAZER R.A., DUNCAN W.J. et COLLAR A.R.

Elementary Matrices (University Press, Cambridge, 1955)

GRAEFFE C.H.

Auflösung der höheren numerischen Gleichungen (Zurich, 1837)

HARTREE D.R.

Notes on iterative processes(Proc.Cambridge Phil. Soc. 45, 230-236, 1949)

HITCHCOCK F.L.

Finding complex roots of algebraic equations (J. Math. Phys. 17, 55-58, 1938)

Algebraic equations with complex coefficients (J. Math. Phys. 18, 202-210, 1939)

KOPAL Z.

Numerical analysis (Chapman and Hall, London, 1955)

KUNTZ K.S.

Numerical analysis (Mc Graw-Hill, 1957)

KUNTZMANN J.

Méthodes Numériques (Dunod, Paris)

LANCZOS C.

On iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators (J. of Research of the National Bureau of Standards, 45, 255-282)

LICHNEROWICZ A.

Algèbre et Analyse linéaires (Masson, Paris, 1956)

MINEUR H.

Techniques de Calcul Numérique (Beranger, Paris, 1952)

MORRIS J.

On a simple method for solving simultaneous linear equations by a successive approximation process (J. Royal Aero. Soc. 39, 349, 1935)

PHAM D.

Généralisation d'un procédé de Routh (C.R. Ac. Sc. mars 1958)

PHAM D. et GHINEA M.

Sur un procédé d'itération dans la théorie des équations (C.R. Ac. Sc. novembre 1959)

Une méthode nouvelle pour la détermination des valeurs et vecteurs propres d'une matrice (C.R. Ac. Sc. Décembre 1960)

ROUTH

Advanced Rigid Dynamics (London, 1905)

SAMUELSON P.A.

A convergent iterative Process (I. Math. Phys. 34, 131-134, 1945)

SCHMIDT J.R.

On the numerical solution of linear simultaneous equations by an iterative method (Phil. Mag. Ser.7, 32, 369-383, 1941)

VALIRON G.

Théorie des Fonctions (Masson, Paris, 1955)

Equations fonctionnelles. Applications (Masson, Paris)

WYNN P.

On a cubically convergent process for determining the zeros of certain functions (M.T.A.C., 10, 97-100, 1956)

TABLES NUMERIQUES

BOLL M.

Tables Numériques Universelles (Dunod, Paris, 1957)

JAHNKE E., EMDE F. et LOSCH F.

Tafeln Höherer Funktionen (Stuttgart, 1960)

PETERS J.

Ten-Place Logarithm Tables (Berlin, 1922)

TABLE DES MATIERES

Avant - Propos I

CHAPITRE I

Le Procédé (P)

1.1. Introduction 1
1.2. Procédé (P) 2
1.3. Construction d'itérations du second ordre 3
1.4. Cas particuliers 11
1.5. Domaines de convergence d'une itération $\phi(z)$ 13
1.6. Itérations monotones. Itérations enveloppantes 18
1.7. Itérations sélectives. Itérations filtrantes 19

CHAPITRE II

Séries Itératives

A. Exemples et Applications

2.1. 23
2.2. Formule de Bodewig 25

2.3. Exemples de séries itératives 26
2.3.I Racine n-ième de A à partir de l'itération de Newton-Raphson 26
2.3.II Racine n-ième de A à partir de l'itération polynomiale 27
2.3.III Inverse d'un nombre à partir de l'itération polynomiale 30
2.3.IV Logarithme d'un nombre A 30
2.3.V Inversion de la fonction d'erreur 31
2.3.VI Inversion d'une fonction transcendante définie par une intégrale de la forme $\int_a^z \frac{dt}{\varphi(t)}$ 34
2.3.VII Application au calcul de certaines intégrales 36

B. Convergence des séries itératives

2.4. 39
2.5. Domaine de convergence de I(z) 40
2.6. Ordre des itérations $\phi_N(z)$ 41
2.7. 2eme Théorème fondamental 46
2.8. Localisation des racines de F(z) 50

CHAPITRE III

Systèmes d'équations

3.1. Généralités 56
3.2. Convergence et ordre des itérations (2 équations) 58
3.3. Généralisation. Cas de n équations 60
3.4. Digression sur la formule de Taylor vectorielle. Opérateur D. 61
3.5. Propriétés de l'opérateur D 63
3.6. Convergence et ordre des itérations (n équations) 65
3.7. Construction des itérations du second ordre 66
3.8. Procédé (P) 67
3.9. Cas particulier de deux variables 68
3.10. Séries itératives 71
3.11. Applications et exemples 75

CHAPITRE IV

Racines presque égales

4.1. Rappel de méthodes connues 82
4.2. Convergence d'une itération d'ordre p dans le cas des racines très voisines 84
4.3. Itération de Newton-Raphson 86
4.4. Artifices divers 87
4.5. Cas de deux racines très voisines 88
4.6. Raffinage de la méthode 93
4.7. Cas de q racines très voisines 98
4.8. Méthode d'agrandissement des racines 94

CHAPITRE V

Applications à quelques points du calcul matriciel

5.1. Généralités 111
5.2. Application I : Inverse d'une matrice A 115
5.3. Application II : Equation linéaire A x - v = 0 115
5.4. Application III : Problème des valeurs propres 118

Bibliographie 128

Table des Matières 132

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Conditions d'existence d'un équilibre économique

Vu

Le Président de la Thèse

Daniel PHAM

Vu

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Noël LOZAC'H

Vu et permis d'imprimer

Caen, le 14 Juin 1961

Le Recteur

Président du Conseil de l'Université

Pierre DAURE

Imprimé par le C. R. D. P. CAEN